Année universitaire 2019-2020
Semestre 4

Ecole Nationale des Sciences Appliquées
Kenitra

TD: Traitement de Signal: Fiche 3

M.Maslouhi

Exercice 1 La fonction Gamma d'Euler est définie par

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt, \quad x > 0. \tag{1}$$

1. Calculer $\Gamma(1/2)$.
2. Montrer que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ pour tout $x > 0$. En déduire la valeur de $\Gamma(n+1)$ lorsque n est un entier.
3. En utilisant la fonction Γ, calculer la transformée de Laplace de la fonction $f(t) = t^x$, pour $x > 0$ donné.

Exercice 2

1. Montrer que si $f : [0, \infty) \to \mathbb{C}$ telle qu'il existe $a > 0$ pour lequel $|f(t)| \leq Me^{at}$, pour tout $t \geq 0$ et telle que $F(s) = \mathcal{L}(f)(s)$ et $\lim_{t\to 0^+} \frac{f(t)}{t}$ existe, alors
$$\int_s^{\infty} F(x)dx = \mathcal{L}\left(\frac{f(t)}{t}\right)(s), \quad s > a.$$
2. **Applications:** Donnez la transformée de Laplace des fonctions suivantes:
$$f_1(t) = \frac{\sin(t)}{t}, \quad f_2(t) = \frac{1-e^{-t}}{t}.$$

Exercice 3 Soit $a \geq 1$. On définie la fonction causale f par $f(t) = a^{[t]}$, où $[t]$ désigne la partie entière de t.

1. Montrer que la transformée de Laplace de f est bien définie sur le domaine $\mathrm{Re}(p) > \ln(a)$.
2. Monter que pour $p \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}(p) > \ln(a)$, on a
$$\mathcal{L}(f)(p) = \frac{1-e^{-p}}{p\left(1-ae^{-p}\right)}.$$

Exercice 4 **Exemple de résolution d'une équation scalaire linéaire**.

On se propose de déterminer la suite (a_n) définie d'une manière unique par l'équation scalaire linéaire suivante: du type
$$\alpha a_{n+2} + \beta a_{n+1} + \gamma a_n = b_n,$$
où α, β et γ sont des constantes et a_0, a_1 donnés

On traite ici un exemple et on donne:
$$a_{n+2} - 3a_{n+1} + 2a_n = 3^n,$$
avec $a_0 = 0$ et $a_1 = 1$.

Pour cela, on définit la fonction causale f par
$$f(t) = a_n, \quad \text{si} \quad n \leq t < n+1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

1. Montrer que f est bien définie sur $\mathbb{R}^+$.

   Dans la suite on suppose que sa transformée de Laplace $\mathcal{L}(f)$ est définie pour tout $p \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}(p) > \alpha$, $\alpha > 0$.

2. Pour t≥ 0 donné, calculer $f(t+k)$, $k \in \mathbb{N}$.

3. En déduire que pour tout $t \geq 0$ on a

$$f(t+2) - 3f(t+1) + 2f(t) = 2^{[t]},$$

   où $[t]$ désigne la partie entière de t.

4. En utilisant l'exercice 3, déterminer la fonction f ainsi que la suite a_n.