Ecole Nationale des Sciences Appliquées
Kenitra

Année universitaire 2019-2020
Semestre 4

# TD: Traitement Signal: Fiche 2

M.MASLOUHI

**Exercice 1** Calculer la transformée de Fourier de la fonction triangle définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 1+x & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ 1-x & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

**Exercice 2** Existe-t-il une fonction $f$ intégrable sur $\mathbb{R}$ telle que pour toute fonction $g$ intégrable sur $\mathbb{R}$, on ait $f * g = g$?
**Ind:** On pourra utiliser la transformée de Fourier.

**Exercice 3** Exprimer la transformée de Fourier de la fonction $g$ définie par

$$g(x) = \cos(x) f(2x+1),$$

en fonction de la transform de Fourier de $f$.

**Exercice 4** On rappelle ici que pour tout $a > 0$, on a

$$\mathcal{F}(e^{-ax^2})(\lambda) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\pi^2}{a}\lambda^2}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

1. Calculer $\mathcal{F}(x^2 e^{-x^2})(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
2. Soit $f$ une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$. On définit la suite de fonctions $f_n$ par $f_1 = f$ et

$$f_{n+1} = f_n * f, \quad n \geq 1,$$

   où $*$ est le produit de convolution.

   (a) Justifier, par un résultat du cours que pour tout $n \geq 1$, $f_n$ est une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$.
   (b) Calculer pour tout $n \geq 1$, $\mathcal{F}(f_n)$ en fonction de $\mathcal{F}(f)$ et $n$.
   (c) En déduire l'expression de $f_n$ dans les cas suivants:
      i. $f(x) = e^{-x^2}$.
      ii. $f(x) = e^{-x}$ si $x \geq 0$ et 0 si $x < 0$.

**Exercice 5** Soit $a$ un réel strictement positif. La fonction porte $\Pi_a$ est définie par

$$\Pi_a(t) = \begin{cases} \frac{1}{2a}, & \text{si } |t| < a; \\ 0 & \text{dans les autres cas.} \end{cases}$$

1. Calculer la transformée de Fourier de $\Pi_a$.
2. **En déduire** la valeur de l'intégrale $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2(a\,\omega)}{\omega^2} d\omega$.
3. On définit la fonction $f$ par $f(t) = e^{-at} H(t)$, $t \in \mathbb{R}$, où $H$ est la fonction de Heaviside.

(a) Soit $F$ la transformée de Fourier de $f$. Calculer $F(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

(b) **En déduire** la transformée de Fourier inverse de

$$G(\lambda) = \frac{1}{(1+i\lambda)(1-i\lambda)^2}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

**Exercice 6 Formule de Poisson**

Soit $f$ une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$ telle la série $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |f(x+2k\pi)|$ converge pour tout $x \in \mathbb{R}$. On pose

$$g(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(x+2k\pi).$$

On suppose que $g$ est continue et $C^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que
$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(2k\pi) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(g),$$
où $c_n(g)$ est coefficient de Fourier complexe de $g$.

2. Calculer $c_n(g)$ en fonction de la transformée de Fourier de $f$. On admettra que
$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(x+2k\pi)dx = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+2k\pi)e^{-inx}dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-inx}dx.$$

3. En déduire la formule de Poisson:
$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(2k\pi) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(n),$$
puis que
$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(\alpha k) = \frac{1}{\alpha} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}\left(\frac{2\pi n}{\alpha}\right),$$
pour tout $\alpha \neq 0$.

4. **Application:** Montrer que
$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{a^2+(2k\pi)^2} = \frac{1}{2a} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-a|n|},$$
pour tout $a > 0$ et trouver la valeur de la série de gauche.

**Exercice 7** Soit $a > 0$. On considère le filtre du second ordre régi par l'équation différentielle

$$-\frac{1}{a^2}g'' + g = f \tag{1}$$

1. Calculer la transformée de Fourier de $t \mapsto e^{-a|t|}$.

2. On suppose que les fonctions intervenant dans l'équation différentielle (1) sont toutes intégrables. Donner alors une relation entre $\widehat{g}$ et $\widehat{f}$.

3. En déduire que
$$g(t) = \frac{a}{2} \int_{\mathbb{R}} e^{-a|t-s|} f(s)ds. \tag{2}$$