OUTILS MATHÉMATIQUES DU TRAITEMENT D'UN SIGNAL

Transformée de Laplace

Mostafa MASLOUHI

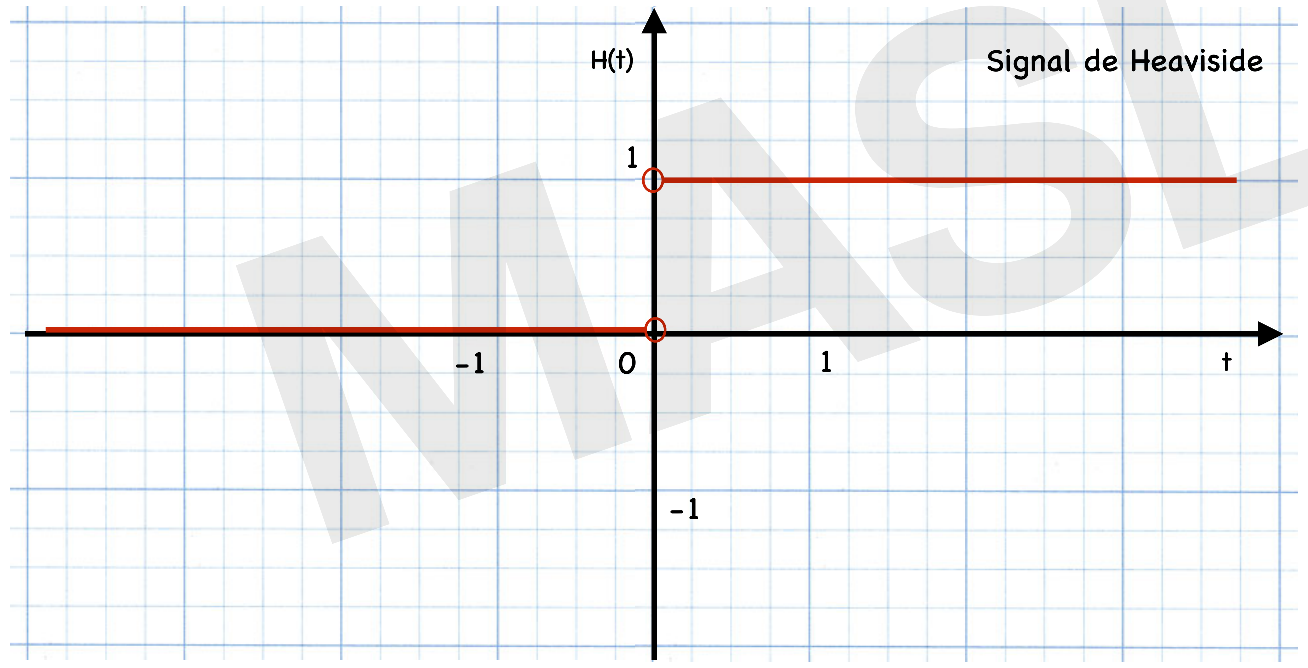
2020 - 2021

Sommaire

Transformée de Laplace

Définitions

Un signal f est dit causal de rang a si l'on a $f(t) = 0$ pour $t < a$. Généralement, on prend $a = 0$ et on parle de signal causal tout court.



La transformation de Laplace d'une fonction $f : (0, +\infty) \to \mathbb{C}$ est la fonction $\mathcal{L}(f)$ définie par:

$$\mathcal{L}(f)(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}\,dt,$$

où $s = \sigma + i\omega$ est un nombre complexe.

Transformée de Laplace

Propriétés de base

1. La transformée de Laplace est linéaire: $\mathcal{L}(f+\lambda g) = \mathcal{L}(f) + \lambda \mathcal{L}(g)$, $\lambda \in \mathbb{C}$.
2. La transformée de Laplace est injective: Si $\mathcal{L}(f) = \mathcal{L}(g)$ alors $f = g$.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}(H(t-a)f(t-a))(p) &= e^{-ap}\mathcal{L}(f)(p), && \text{Effet d'une translation}\\
\mathcal{L}(f(at))(p) &= \frac{1}{a}\mathcal{L}(f)\left(\frac{p}{a}\right), && \text{Effet d'un changement d'échelle}\\
\mathcal{L}(e^{-at}f(t))(p) &= \mathcal{L}(f)(p+a), && \text{Effet de multiplication par une exponentielle}\\
\mathcal{L}(tf(t))(p) &= -\frac{d}{dp}(\mathcal{L}(f(t)))(p), && \text{Dérivée de la TL}
\end{aligned}
$$

Transformée de Laplace

Transformée d'une dérivation

Soit f une fonction causale de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$. Alors on a

$$\mathcal{L}(f')(p) = p\mathcal{L}(f)(p) - f(0^+).$$

D'une manière générale si f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $]0,+\infty[$, alors on a

$$\mathcal{L}(f^{(n)})(p) = p^n\mathcal{L}(f)(p) - p^{n-1}f(0^+) - p^{n-2}f'(0^+) - \cdots - f^{(n-1)}(0^+).$$

De ce qui précède, on voit que si $g(t)$ est la primitive de $f(t)$ qui s'annule en zéro. Alors

$$\mathcal{L}(g)(p) = \frac{1}{p}\mathcal{L}(f)(p).$$

Transformée de Laplace

Dérivée d'une Transformée de Laplace

Soit f une fonction causale de classe C^1 sur $]0,+\infty[$. On suppose que les applications $f(t)$ et $t \mapsto tf(t)$ admet une transformée de Laplace dans un domaine $\mathrm{Re}(\lambda) > a > 0$. Alors on pour tout $\lambda > a$ on a

$$\frac{d}{d\lambda}\left(\mathcal{L}(f)\right)(\lambda) = -\mathcal{L}(tf(t))(\lambda).$$

D'une manière générale si on répète ce processus (avec les hypothèses nécessaires) alors on a pour tout $n \geq 0$:

$$\mathcal{L}(t^n f(t))(\lambda) = (-1)^n \frac{d^n}{d\lambda^n}(\mathcal{L}(f(t)))(\lambda).$$

En particulier:

$$\mathcal{L}(t^n)(\lambda) = \frac{n!}{\lambda^{n+1}}.$$

Théorèmes Limites

Soit f une fonction définie sur $]0,+\infty[$ telle que f admette une limite en $+\infty$ et en 0^+. Alors

$$\lim_{p\to 0} p\mathcal{L}(f)(p) = \lim_{t\to +\infty} f(t), \quad \text{(Théorème de la valeur finale)}$$

et aussi

$$\lim_{p\to +\infty} p\mathcal{L}(f)(p) = \lim_{t\to 0^+} f(t), \quad \text{(Théorème de la valeur initiale).}$$

Transformée de Laplace

Table de quelques transformées usuelles

$f(t)$	$\mathcal{L}(f)(p)$
1	$\frac{1}{p}$
$e^{at},\ a \in \mathbb{C}$	$\frac{1}{p-a}$
$t^n,\ n \in \mathbb{N}$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
$t^n e^{at},\ n \in \mathbb{N},\ a \in \mathbb{C}$	$\frac{n!}{(p-a)^{n+1}}$
$\sin(\omega t),\ \omega \in \mathbb{R}$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$
$\cos(\omega t),\ \omega \in \mathbb{R}$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$
$\sin(\omega t)e^{at},\ a, \omega \in \mathbb{R}$	$\frac{\omega}{(p-a)^2+\omega^2}$
$\cos(\omega t)e^{at},\ a, \omega \in \mathbb{R}$	$\frac{p-a}{(p-a)^2+\omega^2}$
$H(t-a)f(t-a),\ a > 0$	$e^{-ap}\mathcal{L}(f)(p)$
$f(t)e^{at},\ a \in \mathbb{C}$	$\mathcal{L}(f)(p-a)$
$f(at),\ a > 0$	$\frac{1}{a}\mathcal{L}(f)\left(\frac{p}{a}\right)$
$f'(t)$	$p\mathcal{L}(f)(p) - f(0^+)$
$f^{(n)}(t)$	$p^n\mathcal{L}(f)(p) - p^{n-1}f(0^+) - p^{n-2}f'(0^+) - \cdots - f^{(n-1)}(0^+)$
$\int_0^t f(u)du$	$\frac{1}{p}\mathcal{L}(f)(p)$

Produit de convolution

Définition et propriété fondamentale

Pour deux fonctions causales f et g, le produit de convolution est donné par

$$f * g(t) = \int_0^t f(t-x)g(x)dx,$$

lorsque l'intégrale est bien définie. On a alors

$$\mathcal{L}(f * g)(p) = \mathcal{L}(f)(p)\mathcal{L}(g)(p).$$

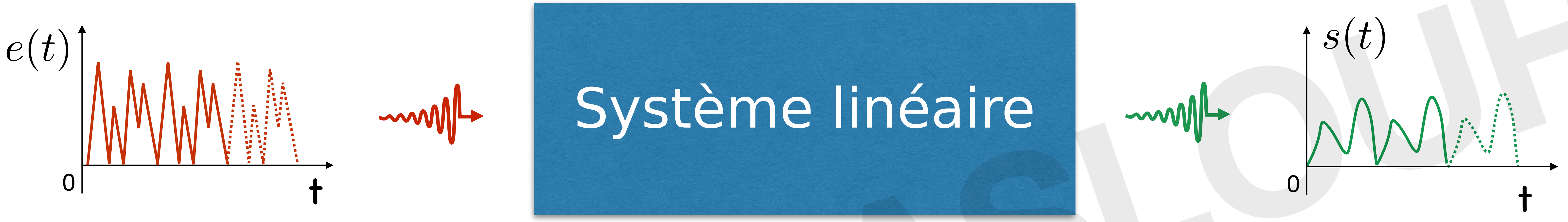
Transformée de Laplace

Application aux systèmes linéaires

$$a_n \frac{d^n s}{dt^n}(t) + a_{n-1}\frac{d^{n-1} s}{dt^{n-1}} \cdots + a_1 \frac{ds}{dt}(t) + a_0 s(t) = b_m \frac{d^m e}{dt^m}(t) + b_{m-1}\frac{d^{m-1} e}{dt^{m-1}}(t) \cdots + b_1 \frac{de}{dt}(t) + b_0 e(t)$$

Transformée de Laplace

Application aux systèmes linéaires



$$a_n \frac{d^n s}{dt^n}(t) + a_{n-1}\frac{d^{n-1}s}{dt^{n-1}} \cdots + a_1 \frac{ds}{dt}(t) + a_0 s(t) = b_m \frac{d^m e}{dt^m}(t) + b_{m-1}\frac{d^{m-1}e}{dt^{m-1}}(t) \cdots + b_1 \frac{de}{dt}(t) + b_0 e(t)$$

$$E(p) = \mathcal{L}(e(t))(p), \quad S(p) = \mathcal{L}(s(t))(p)$$

$$S(p) = \frac{b_m p^m + b_{m-1}p^{m-1} + \cdots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \cdots + a_1 p + a_0} E(p)$$

(En supposant les conditions initiales nulles pour e(t) et s(t))

Transformée de Laplace

Application aux systèmes linéaires

$$S(p) = \boxed{\frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \cdots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \cdots + a_1 p + a_0}} E(p)$$

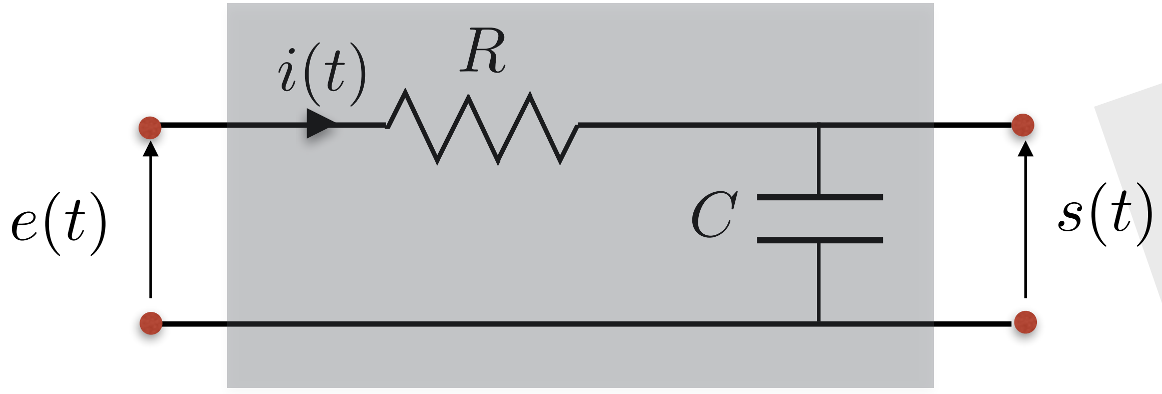
$$\boxed{G(p)} = \frac{S(p)}{E(p)}$$

Fonction de transfert du système

Transformée de Laplace

Exemples de systèmes linéaires

Circuit RC

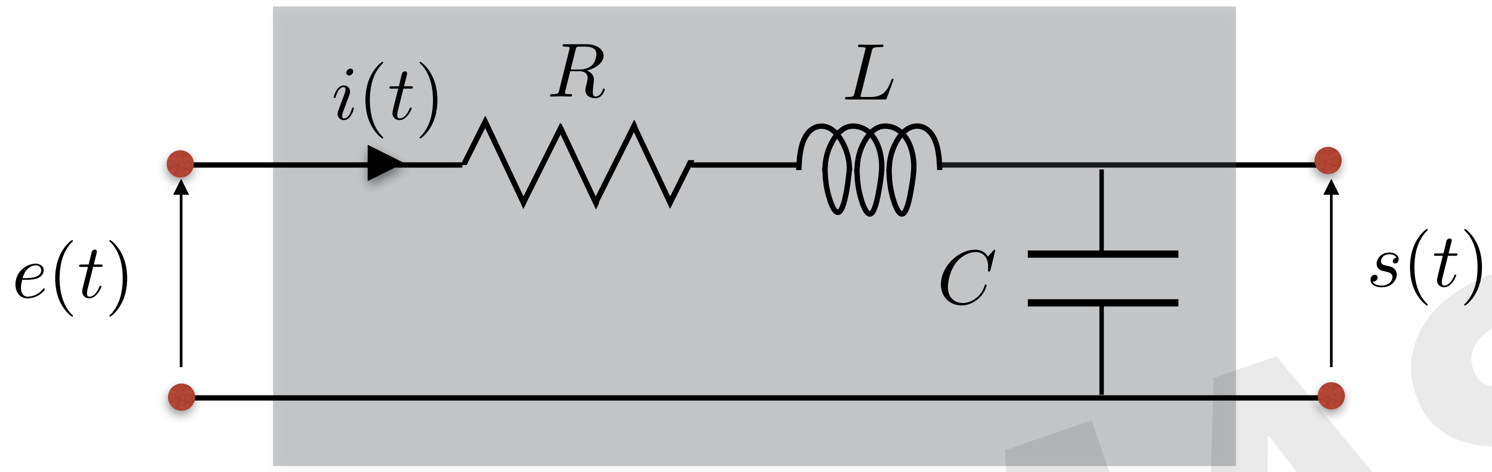


$$RC\frac{ds(t)}{dt} + s(t) = e(t)$$

$$G(p) = \frac{1}{1 + RCp}$$

Transformée de Laplace

Exemples de systèmes linéaires



Circuit RLC

$$LC\frac{d^2s(t)}{dt^2} + RC\frac{ds(t)}{dt} + s(t) = e(t)$$

$$G(p) = \frac{1}{LCp^2 + RCp + 1}$$

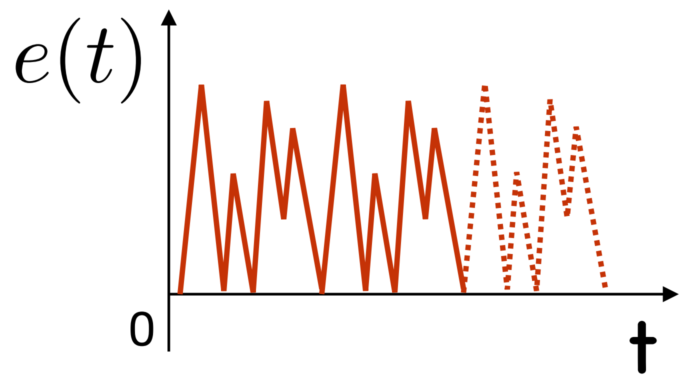
Diagramme de Bode

1905-1982

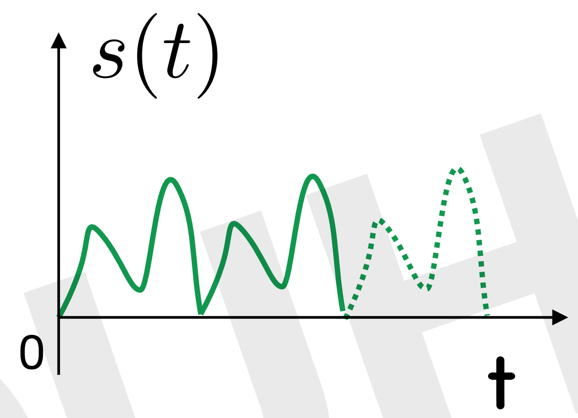
Hendrik Wade Bode était un ingénieur, chercheur scientifique et pionnier de la théorie du contrôle moderne et des télécommunications électroniques. Avec Claude Shannon, le père de la théorie de l'information, il a introduit les bases de la convergence technologique de l'ère de l'information.

Il a apporté d'importantes contributions à la théorie des systèmes de contrôle et aux outils mathématiques pour l'analyse de la stabilité des systèmes linéaires, en inventant les graphiques de Bode.

Diagramme de Bode



Système linéaire



$$H(p) = \frac{E(p)}{S(p)}$$ = Fonction de transfert du sytème

$$\left| H(i\omega) \right|$$ = Gain du system

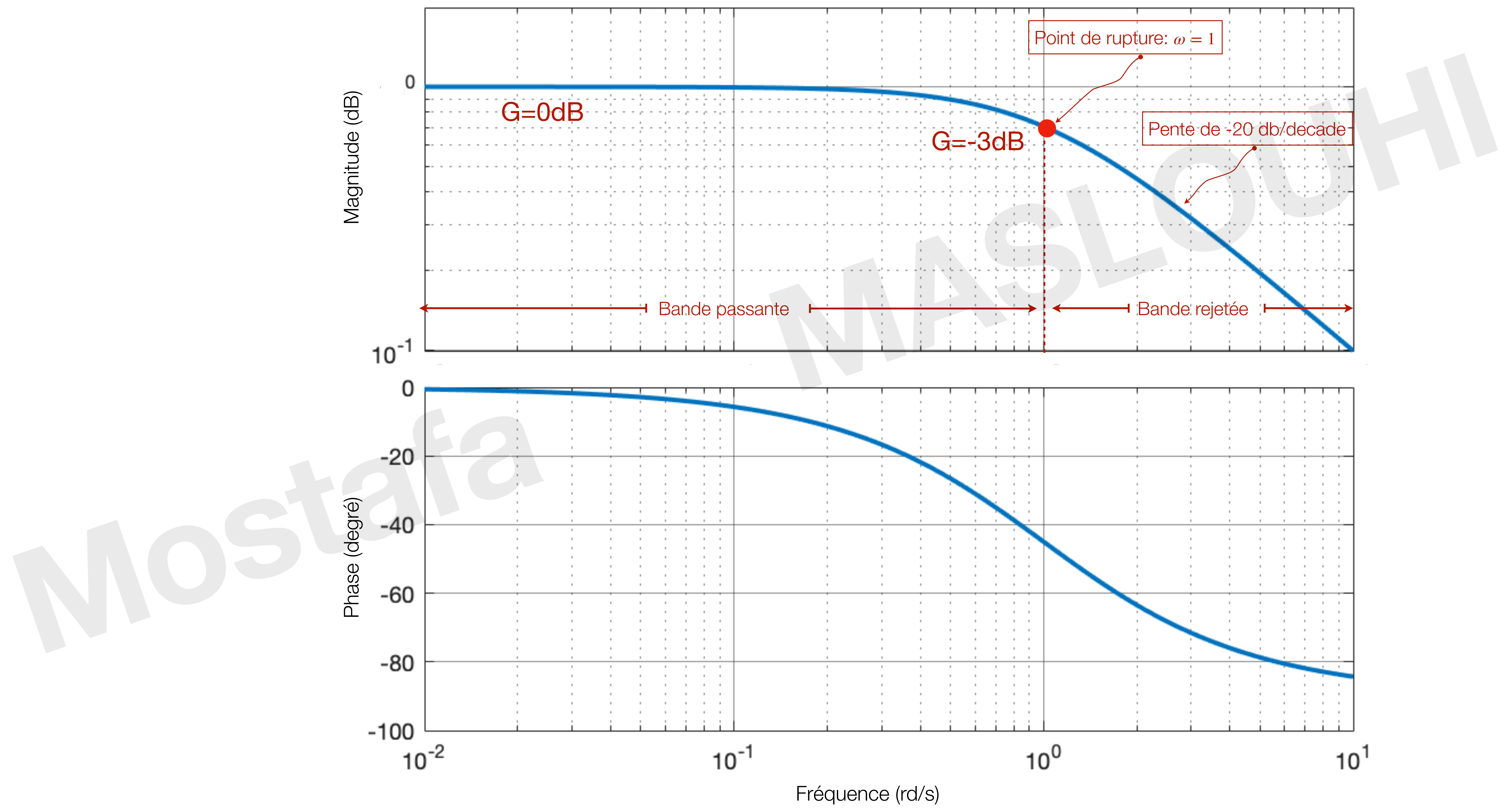
$$\text{Arg}\left(H(i\omega)\right)$$ = Décalage de phases

Diagramme de Bode: Exemple

$$H(s) = \frac{1}{s+1}$$

$$Mag(\omega) = 20\log\left|H(i\omega)\right| = -10\log(1+\omega^2)$$

$$\mathrm{Arg}(H(i\omega)) = 0 - \mathrm{Arg}(1+i\omega) = -\arctan(\omega)$$



Point de rupture: $\omega = 1$
Pente de -20 db/decade
G=0dB
G=-3dB
Bande passante
Bande rejetée
Magnitude (dB)
Phase (degré)
Fréquence (rd/s)
0
10^{-1}
0
-20
-40
-60
-80
-100
10^{-2}
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
Mostafa MASLOUHI

Merci pour votre attention