OUTILS MATHÉMATIQUES DU TRAITEMENT D'UN SIGNAL

Mostafa MASLOUHI

2020-2021

OUTILS MATHÉMATIQUES DU TRAITEMENT D'UN SIGNAL

Etude spectrale d'un signal périodique

Mostafa MASLOUHI

2020-2021

Etude spectrale d’un signal périodique

Sommaire

Un peu d'historique ...

Joseph Fourier (1738-1830)

Fourier a introduit en 1807 la série qui porte son nom, dans le but de résoudre l'équation de propagation de la chaleur dans une plaque métallique:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Plus précisément, il a prétendu qu'une fonction "arbitraire" u peut être représentée par une série trigonométrique c.à.d de la forme:

$$u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$$

C'est quoi un signal ?

Un signal est toute information pouvant être véhiculée (ou transmise), le long d'un support physique ou autre, d'une source émettrice vers une destination réceptrice.
Un signal possède toujours une grandeur qu'on souhaite analyser ou mesurer par un appareil de mesure adéquat.

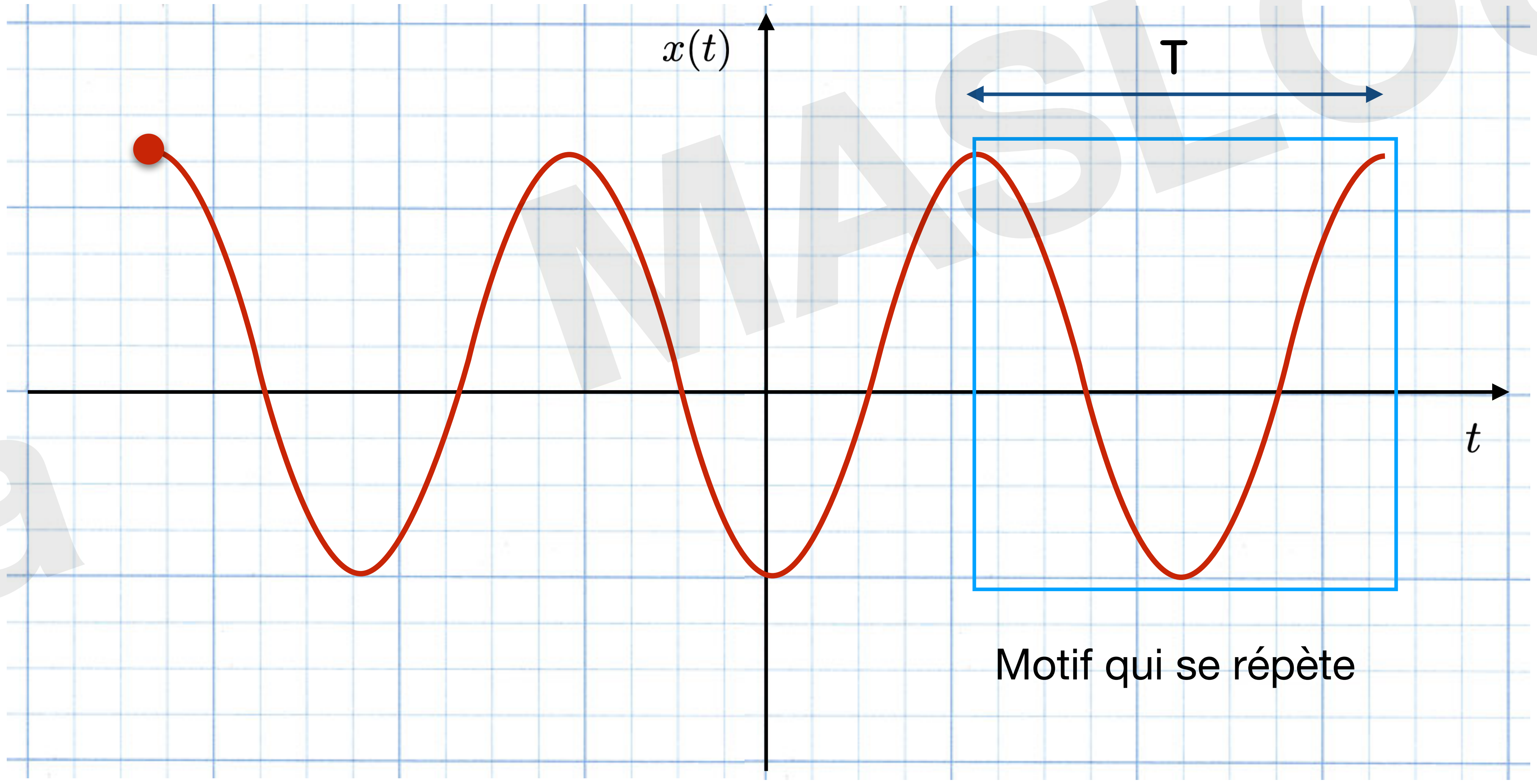
Dans ce cours, on étudiera les signaux modélisés par une fonction $x(t)$ où t prend toutes les valeurs d'un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. Ces signaux sont appelés des signaux continues.

Un signal $x(t)$, $t \in \mathbb{R}$, est dit T-périodique si l'on a

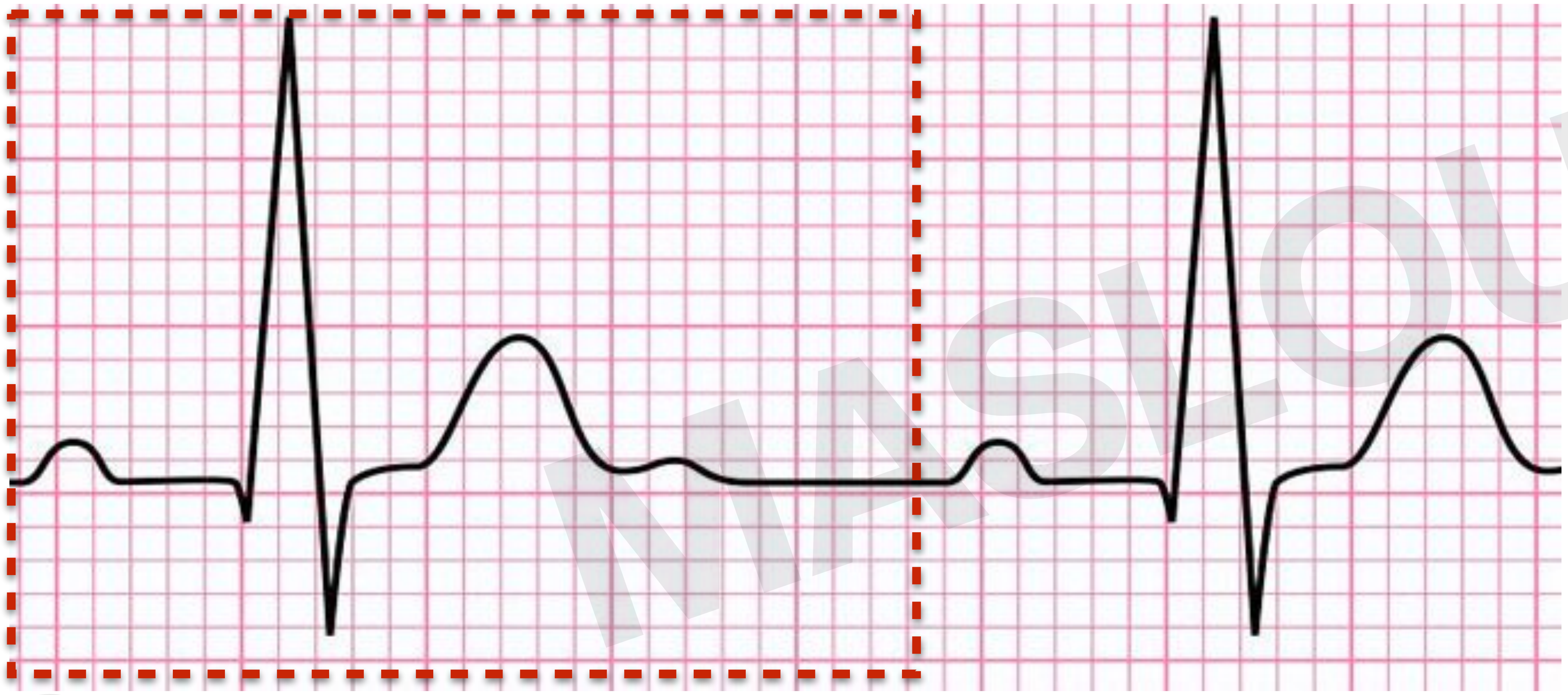
$$x(t+T) = x(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Période et fréquence d'un signal périodique

Signal périodique de période T (secondes) ou de fréquence f=1/T (Hertz)



Exemple d’un signal périodique



Battement du coeur

Décomposition Spectrale d'un signal périodique

Coefficients de Fourier

x signal T-périodique $\qquad f = \dfrac{1}{T}$: *fréquence* $\qquad \omega = \dfrac{2\pi}{T} = 2\pi f$: *pulsation*

Les coefficients de Fourier complexes, ou exponentiels, de x sont les nombres complexes définis par:

$$\boxed{c_n = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)e^{-i\,n\omega\,t}dt, \quad (n \in \mathbb{Z}).}$$

Si x est à valeurs dans $\mathbb{R}$, les coefficients de Fourier trigonométriques associés à x sont les nombres réels définis par

$$\boxed{a_n = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\cos(n\,\omega t)dt, \quad b_n = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\sin(n\,\omega t)dt, \qquad (n \in \mathbb{N}).}$$

x signal T-périodique $\quad f = \dfrac{1}{T}$: *fréquence* $\quad \omega = \dfrac{2\pi}{T} = 2\pi f$: *pulsation*

La série de Fourier associée au signal x est donnée par:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(x)e^{in\omega t} = c_0(x) + \sum_{n\geq 1} c_n(x)e^{in\omega t} + c_{-n}(x)e^{-in\omega t} \quad \text{(forme exponentielle)}$$

ou encore

$$\frac{a_0(x)}{2} + \sum_{n\geq 1} a_n(x)\cos(n\omega t) + b_n(x)\sin(n\omega t) \quad \text{(forme trigonométrique)}$$

Propriétés des Coefficients de Fourier

Si x est à valeurs réelles, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$c_n(x) = \frac{a_n(x) - ib_n(x)}{2}.$$

Si x est un signal continue par morceaux, alors

$$\lim_{|n|\to+\infty} c_n(x) = \lim_{n\to+\infty} a_n(x) = \lim_{n\to+\infty} b_n(x) = 0.$$

Si x est une fonction réelle alors on a:

1. x paire entraîne que $a_n(x) = \dfrac{4}{T}\displaystyle\int_0^{T/2} x(t)\cos(n\,\omega t)$ et $b_n = 0\ \forall\, n \in \mathbb{N}$.
2. x impaire entraîne que $b_n(x) = \dfrac{4}{T}\displaystyle\int_0^{T/2} x(t)\sin(n\,\omega t)$ et $a_n = 0\ \forall\, n \in \mathbb{N}$.

Propriétés des Coefficients de Fourier

Si x est continue sur $\mathbb{R}$, de classe C^1 par morceaux alors

$$c_n(x') = in\, c_n(x).$$

Plus généralement, si x de C^{k-1} sur $\mathbb{R}$ et de C^k par morceaux alors

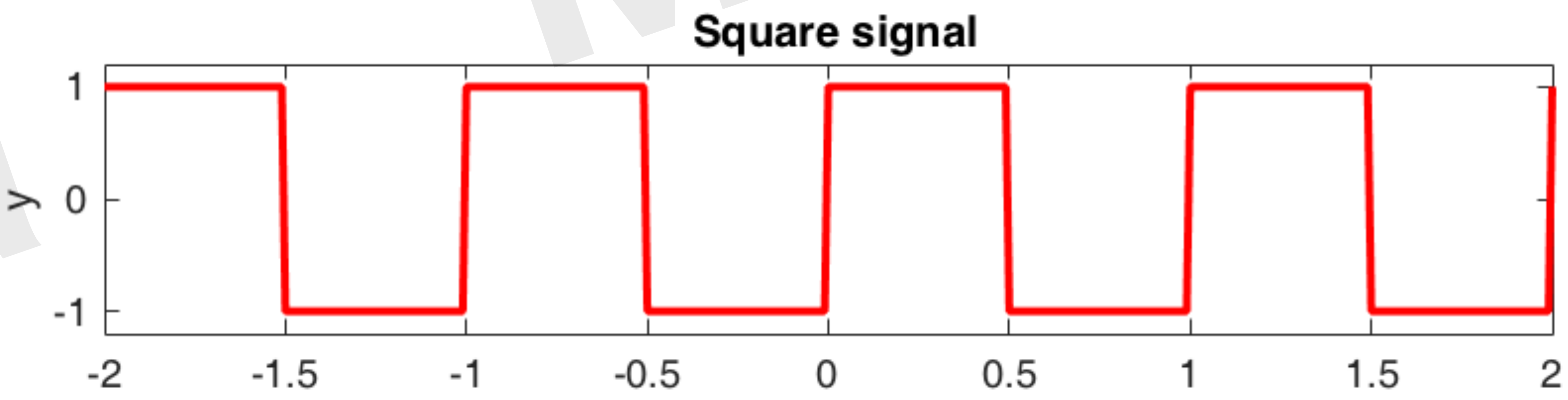
$$c_n(x^{(k)}) = (in)^k\, c_n(x)$$

Théorème de Dirichlet

Soit $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, T-périodique et C^1 par morceaux. Alors pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a:

$$\frac{x(t^+) + x(t^-)}{2} = \frac{a_0(x)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(x)\cos(n\,\omega t) + b_n(x)\sin(n\,\omega t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(x)e^{in\,\omega t}.$$

En particulier, si de plus x est continue sur $\mathbb{R}$, alors les deux séries coïncident avec $x(t)$ pour $t \in \mathbb{R}$.

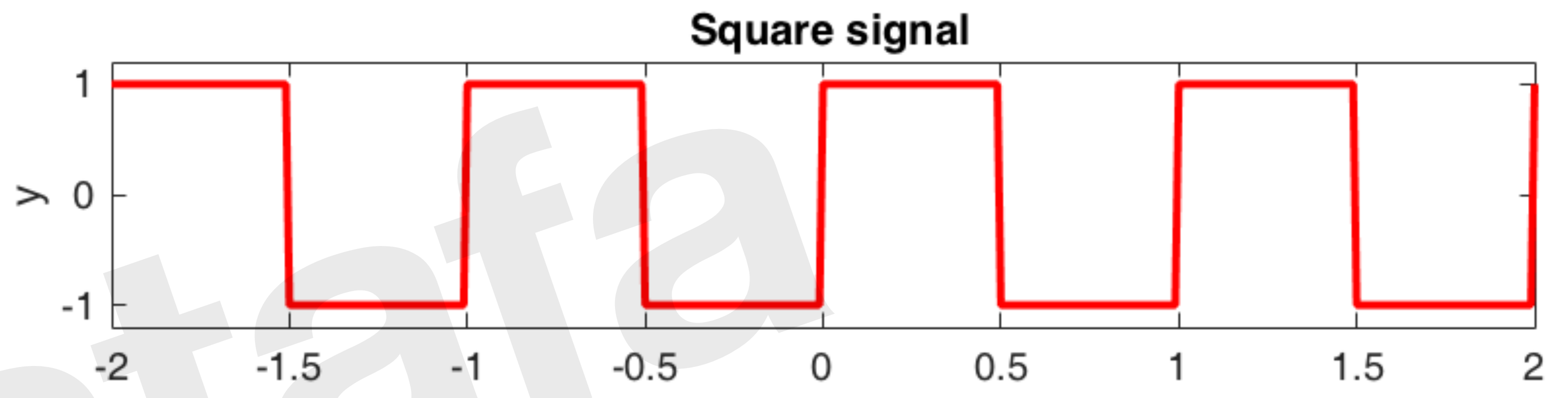


Théorème de Dirichlet

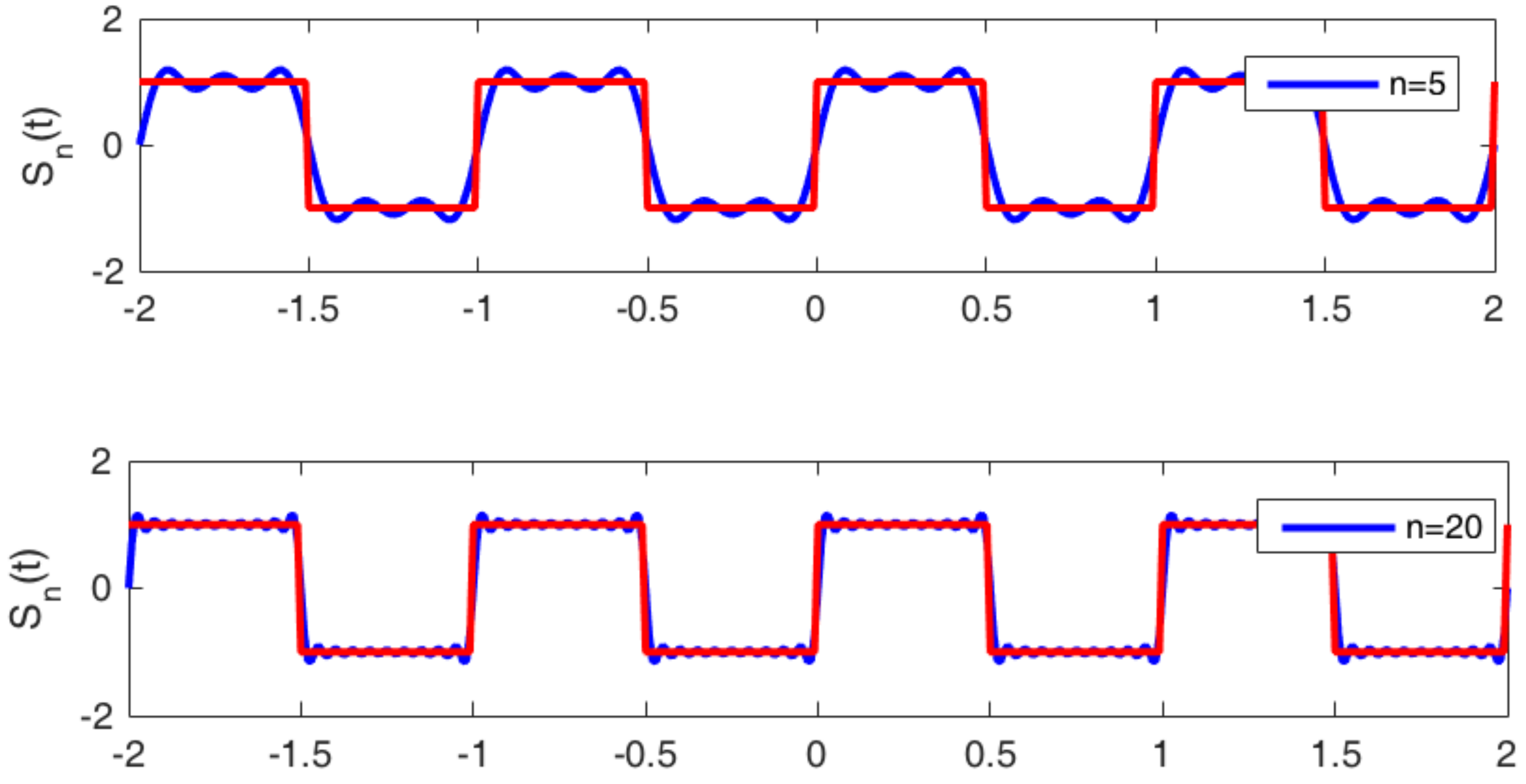
Soit $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, T-périodique et C^1 par morceaux. Alors pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a:

$$\frac{x(t^+) + x(t^-)}{2} = \frac{a_0(x)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(x)\cos(n\,\omega t) + b_n(x)\sin(n\,\omega t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(x) e^{in\,\omega t}.$$

En particulier, si de plus x est continue sur $\mathbb{R}$, alors les deux séries coïncident avec $x(t)$ pour $t \in \mathbb{R}$.



$$S_n(t) = \frac{a_0(x)}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k(x)\cos(k\omega t) + b_k(x)\sin(k\omega t)$$



Théorème de Parseval

Si x est continue par morceaux et T-périodique alors la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(x)|^2$ converge et l'on a:

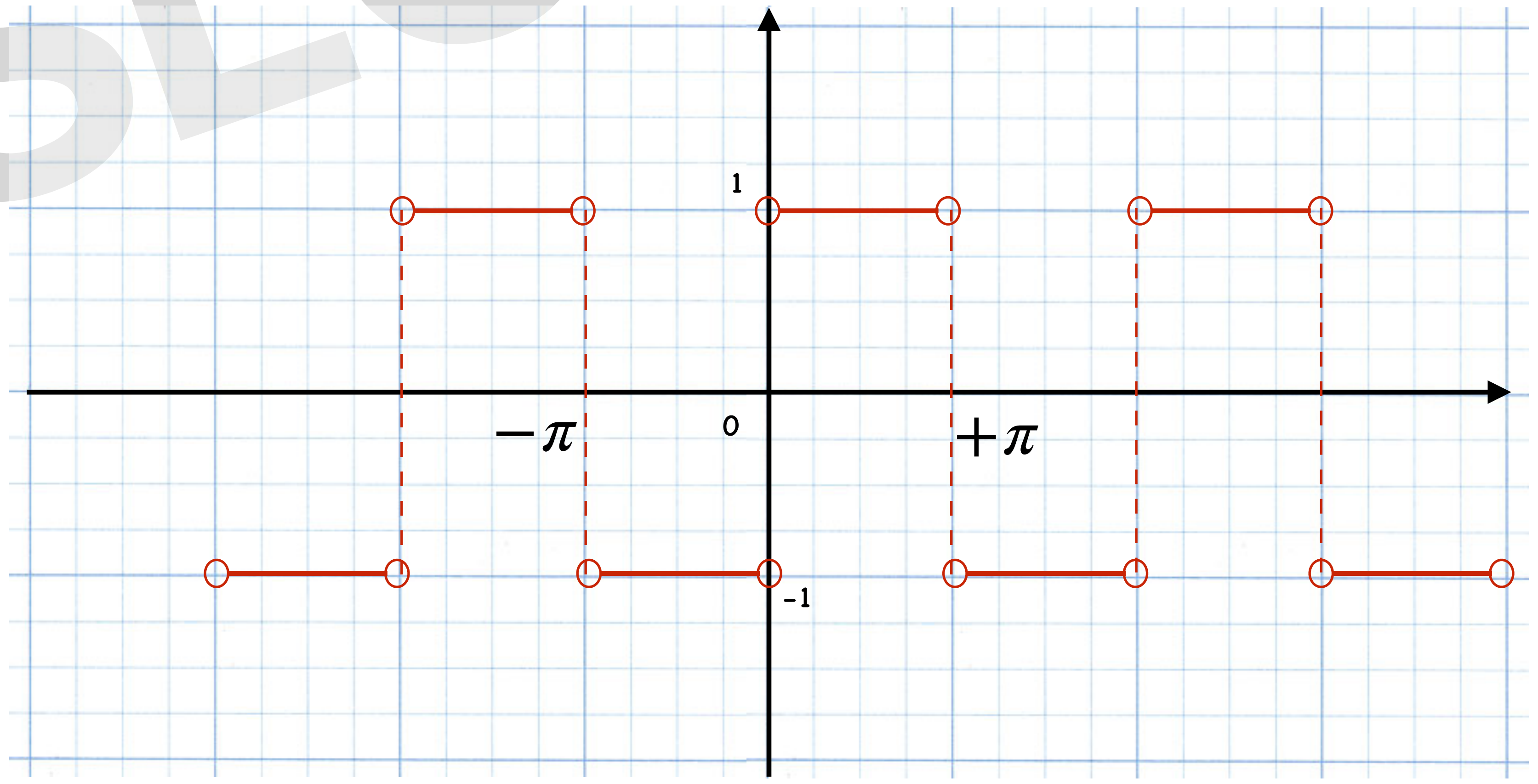
$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(x)|^2 = \frac{1}{T}\int_0^T |x(t)|^2\,dt, \quad \text{(Formule de Parseval).}$$

Ou encore,

$$\frac{(a_0(x))^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2(x) + b_n^2(x) = \frac{1}{T}\int_0^T |x(t)|^2\,dt.$$

Exercices d'application

Exercice1: Donnez le développement en série de Fourier du signal f impaire, 2π périodique et telle que $f(x) = 1$ si $x \in]0, \pi[$.



Tracé du signal f

Réponse:

- $a_n = 0$
- $b_n = 2\dfrac{1-(-1)^n}{n\pi}$ $\qquad b_{2n} = 0, \quad b_{2n+1} = \dfrac{4}{(2n+1)\pi}$
- $\dfrac{f(x^+)+f(x^-)}{2} = \dfrac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{(2n+1)}\sin((2n+1)x), \quad \forall x \in \mathbb{R}\,.$

Exercices d'application

Exercice 2: On donne le signal f, 2π-périodique tel que $f(t) = t$ si $t \in]-\pi, \pi[$.
Etudier la convergence de la série de Fourier du signal f et en déduire les sommes des séries $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ et $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Réponse:

- $f(t) = 2\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(nt) \quad \forall\, t \in]-\pi, \pi[.$
- La première somme demandée vaut $\frac{\pi}{4}$ et s'obtient en prenant $t = \dfrac{\pi}{2}$ et en remarquant que $f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}$ et que $\sin\left((2n)\frac{\pi}{2}\right) = 0$ et $\sin\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right) = (-1)^n$.
- La formule de Parseval appliquée à f donne que,

$$\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} t^2 dt = \frac{\pi^2}{3}$$

ce qui donne la deuxième somme demandée.

Merci pour votre attention