Année universitaire 2014-2015
Semestre 4

Ecole Nationale des Sciences Appliquées
Kénitra

Contrôle de Probabilité

(Durée 1H30)

La présentation des copies et la précision des raisonnements constitueront des éléments importants pour l'évaluation des copies.

Aucun résultat non justifié ne sera pris en considération.

Bon courage.

Exercice 1 **(8 points)** On dispose d'un dé parfait numéroté de 1 à 6 et d'une pièce de monnaie dont la probabilité d'apparition de PILE lors d'un lancer est $a = \frac{1}{4}$.
On procède à l'expérience suivante: On lance le dé une fois et on note le numéro obtenu.

- Si le numéro obtenu est 6, alors on lance la pièce de monnaie deux fois.
- Dans tous les autres cas, on lance la pièce de monnaie une seule fois.

On désigne par X la variable aléatoire qui donne le résultat du dé et on désigne par Y la variable aléatoire qui donne le nombre de PILE obtenus lors de cette expérience.

1. Donner la loi de X et calculer $E(X)$ ainsi que $V(X)$.
2. Donner la loi de Y et calculer $E(Y)$ ainsi que $V(Y)$.

Exercice 2 **(12 points)** Une urne contient deux boules noires et $(n-2)$ boules blanches, n désignant un entier supérieur ou égal à 3. On procède à des tirages successifs d'une boule de l'urne et on désigne par X_k la variable aléatoire qui vaut 1 si la boule noire est obtenue au $k^{\text{ème}}$ tirage (que ce soit la première fois ou non) et 0 sinon. Enfin, on désigne par X la variable aléatoire égale au nombre d'apparitions de la boule noire lors de cette épreuve.

1. Dans une première épreuve on décide d'effectuer N tirages, $N \geq 3$ donné, et que les tirages s'effectuent tous avec remise. Donner la loi de X ainsi que son espérance et sa variance.
2. Dans une seconde épreuve, les tirages s'effectuent de la manière suivante: les tirages d'ordre impair s'effectuent sans remise et les tirages d'ordre pair s'effectuent avec remise.
   (a) Quel est le nombre total de tirages effectués lors de cette épreuve jusqu'à épuisement des boules de l'urne?
   (b) Calculer $P(\text{“}X_1 = 1\text{”})$, $P(\text{“}X_2 = 1''\text{)}$ et $P(\text{“}X_3 = 1'')$.
   (c) Pour $k = 2, \ldots, n-1$, calculer $P(X_{2k} = 1)$ en fonction des événements:
   $$A_0 = \text{“}X_1 = 0\text{”} \cap \text{“}X_3 = 0\text{”} \cap \cdots \cap \text{“}X_{2k-1} = 0\text{”}$$
   et $A_i = \text{“}X_1 = 0\text{”} \cap \cdots \cap \text{“}X_{2i-1} = 0\text{”} \cap \text{“}X_{2i+1} = 1\text{”} \cap \text{“}X_{2i+3} = 0\text{”} \cap \cdots \cap \text{“}X_{2k-1} = 0\text{”}$ $i = 0, \ldots, k-1$. (On ne demande pas d'expliciter la valeur de cette probabilité.)
   (d) Calculer $P(\text{“}X_4 = 1\text{”})$.