TD3 Analyse numérique:
Interpolation de Lagrange - Polynôme de Tchebychev

Exercice 0.1 *Soient* $(x,\ y) \in (\mathbb{R}^4)^2$ *et* f *une application de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *tels que:*

$$x = [0, -2, -1, 2] \quad et \quad y = [f(0) = 0, f(-2) = -4, f(-1) = 0, f(2) = -4].$$

Parmi les polynômes suivants, justifiez lequel est le polynôme d'interpolation $L[A_3, f]$ *aux points* $x,\ y$ *?*

1. $P_1(X) = 2X^5 - X^4 - 3X^3 + \frac{2}{5}X + 5$
2. $P_2(X) = \frac{1}{3}X(X^2 - 3X - 4)$
3. $P_3(X) = \frac{4}{3}X^2 - X + \frac{1}{2}$

Exercice 0.2

1. *Montrer que Le polynôme d'interpolation de Lagrange aux points* $x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_n$ *d'un polynôme de degré* $\leq n$ *est lui-même.*
2. *Soit* P *un polynôme. Montrer que son polynôme d'interpolation aux noeuds* $x_i \in \mathbb{R},\ 0 \leq i \leq n$*, est le reste de la division euclidienne de* P *par le polynôme* $\pi_n(x) = (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n)$.
3. *Calculer le polynôme d'interpolation de Lagrange de la fonction* $f(x) = x(x^2 - 1)$ *relativement aux points* $x_0 = -1,\ x_1 = 1$ *et* $x_2 = 2$.

Exercice 0.3 *On considère* $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ *et le polynôme d'interpolation* P_n *tel que*

$$\forall i = 0,\ \ldots\ n,\ P_n(x_i) = e^{x_i}.$$

Montrer que la suite de polynômes d'interpolation P_n *converge uniformément vers la fonction exponentielle lorsque* n *tend vers l'infini, c'est-à-dire que:*

$$\sup_{x\in[a,b]} |P_n(x) - e^x|_{n\to\infty} 0$$

Exercice 0.4 *Soit* $n \in \mathbb{N}$*, nous définissons le polynôme de Chebychev de première espèce par*

$$T_n(x) = \cos(n\arccos(x)), \quad x \in [-1, 1].$$

1. *Montrer que les fonctions* T_n *satisfait la formule de récurrence*

$$\begin{cases} T_0(x) &= 1,\ T_1(x) = x, \\ T_{n+1}(x) &= 2xT_n(x) \ - T_{n-1}(x). \end{cases}$$

2. *On définit sur l'espace* $C([-1, 1], \mathbb{R})$ *le produit scalaire* $(.,.)$*, à la fonction poids* $(1 - x^2)^{-1/2}$.

(a) *Montrer que les polynômes $T_n(x)$ sont orthogonaux par rapport à $(.,.)$,*

$$\int_{-1}^{1} T_n(x)T_m(x))\frac{dx}{(1-x^2)^{-1/2}} = \begin{cases} \pi, & \text{si } n \ = m = 0, \\ \pi/2, & \text{si } n \ = m \neq 0, \\ 0, & \text{si } n \ \neq m. \end{cases}$$

(b) *Montrer que $T_n(x) \in \mathbb{R}_n[X]$ et dont le coefficient de x^n est 2^{n-1}.*

3. *Nous posons $\tau_n(x) = 2^{1-n}T_n(x)$, $x_k = \cos(\frac{k\pi}{n})$, $k = 0, \ \ldots, \ n$, calculer $\tau_n(x_k)$.*

4. *Soient $a_1, \ \ldots, \ a_n$, n points quelconques de $[-1, 1]$. Nous posons $w_n(x) = (x - a_1)\ldots(x - a_n)$.*

   Supposons par l'absurde que $\|w_n\|_\infty < \|\tau_n\|_\infty$. Montrer alors que

$$\begin{cases} \tau_n(x_k) - w_n(x_k) > 0, \text{ si } k \text{ est pair,} \\ \tau_n(x_k) - w_n(x_k) < 0, \text{ si } k \text{ est impair.} \end{cases}$$

5. *En déduire que $\|w_n\|_\infty \geq \|\tau_n\|_\infty$.*

6. *Application : Soit $L[A_n, f]$ le polynôme de Lagrange de la fonction f définie pour tout $x > -2$ par $f(x) = \ln(x + 2)$ aux points racines du polynôme de Chebychev T_n. Déterminer n pour que $L[A_n, f]$ donne une valeur approché de $\ln(x + 2)$ avec 10 décimales correctes.*

Exercice 0.5 *On définit dans $\mathbb{R}_n[X]$ les polynômes ;*

$$\begin{cases} e_0 & = & 1 \\ e_k(x) & = & \prod_{i=0}^{k-1}(x - x_i) = (x - x_0)(x - x1)\cdots(x - x_{k-1}), 1 \leq k \leq n. \end{cases}$$

1. *Justifier que l'ensemble des polynômes $(e_k)_{0\leq k\leq n}$ (base de Newton) forment une base de l'espace $\mathbb{R}_n[X]$.*

2. *Soit $f : [a, \ b] \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^{n+1}. La formule de Newton qui consiste à écrire le polynôme $L[A_n, f]$ aux points $x_0, \ldots, \ x_n$ sous la forme*

$$L[A_n, f] = a_0e_0(x) + a_1e_1(x) + \ldots + a_ne_n(x),$$

   (a) *Déterminer une relation de récurrence entre $L[A_n, f]$ et $L[A_{n-1}, f]$.*

   (b) *Montrer que le polynôme d'interpolation de Lagrange de la fonction f aux points distincts $(x_i)_{1\leq 0\leq n}$ est donné par*

$$P_n(x) = f[x_0] + \sum_{i=1}^{n} f[x_0, \ \ldots, \ x_i] \prod_{k=0}^{i-1}(x - x_k),$$

   où $f[.]$ désigne les différences divisées de f définies par

$$\begin{cases} f[x_i] & = & f(x_i), \ pour \ \ tout \ \ \ i = 0, \ \ldots, \ n. \\ f[x_0, \ \ldots, \ x_k] & = & \frac{1}{x_k - x_0}\left(f[x_1, \ \ldots, \ x_{x_k}] - f[x_0, \ \ldots, \ x_{k-1}]\right), \ k = 1, \ \ldots, \ n. \end{cases}$$

ind: On pourra poser

$$Q(X) = \frac{x - x_0}{x_n - x_0} Q_{n-1}(X) + \frac{x_n - x}{x_n - x_0} P_{n-1}(X)$$

où $Q_{n-1}(X) = \sum_{i=1}^{n} f[x_1,\ \dots,\ x_i] \prod_{k=1}^{i-1}(x - x_k)$

(c) *Montrer ensuite que* $f[x_0,\ \dots,\ x_n]$ *est invariant par permutations.*

3. (a) *Montrer qu'il existe* $\xi \in [a,\ b]$ *tel que*

$$f[x_0,\ \dots,\ x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}.$$

(b) *Montrer que*

$$|P_n(x) - f(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |\pi_n(x)|,$$

où $M_{n+1} = \max_{a \leq x \leq b} |f^{(n+1)}(x)|$ *et* $\pi_n(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$.

4. *Application: Trouver l'interpolation de Lagrange de la fonction* $x \to f(x) = \sin(\pi x/2)$ *aux points* $x_0 = 0,\ x_1 = 1$ *et* $x_2 = 2$. *Puis à 1'aide des questions précédentes établir une estimation d'erreur.*