# TD5 Analyse numérique 2019-2020

**Exercice 1** *On considère les matrices $A$ et $C$.*

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 6 & 3 \\ 6 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

1. (a) *Calculer la décomposition $LU$ de la matrice $A$.*

   (b) *Résoudre le système linéaire $Ax = b$, où $A$ est la matrice ci-dessus, avec $b = (1, 2, 3)^t$.*

2. (a) *Est-ce que $C$ admet une décomposition $LU$ ?*

   (b) *Montrer que la décomposition $LU$ de la matrice obtenue en permutant les lignes 1 et 2 de la matrice $C$ s'écrit $PC = LU$, òù $P$ est une matrice élémentaire. Déterminer $P$, $L$ et $U$.*

   (c) *resoudre le systeme $Cx = (1, 5, 6)^t$.*

**Exercice 2** 1. *Pour une matrice $A$=($a_{ij}$) donnée que représente cette algorithme :*

1 : $t_{1,1} \leftarrow \sqrt{a_{11}}$

2 : for $i = 2$ to $n$ do

3 : $t_{1,i} \leftarrow \frac{a_{1,i}}{t_{1,1}}$

4 : end for

5 : for $k = 2$ to $n-1$ do

6 : $t_{k,k} \leftarrow (a_{k,k} - \sum_{i=1}^{k-1} t_{i,k}^2)^{1/2}$

7 : for $i = k+1$ to $n$ do

8 : $t_{i,k} \leftarrow (a_{k,i} - \sum_{j=1}^{k-1} t_{j,i} t_{j,k})/t_{k,k}$

9 : end for

10 : end for

11 : $t_{n,n} \leftarrow (a_{n,n} - \sum_{i=1}^{n-1} t_{i,n}^2)^{1/2}$

2. *Écrire une procedure Maple pour determiner la matrice $T$ telle que $A = T^t T$*

3. *Résoudre le système linéaire $Ax = b$ par la méthode du decomposition $A$=$LU$ et Cholesky avec les données*

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 3 \\ 4 & 6 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 0 & 5 \\ -1 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } b=\begin{pmatrix} 11 \\ 6 \\ 21 \\ 3 \end{pmatrix}$$

**Exercice** 3 *Soit* $A \in M_n(\mathbb{R})$ *la matrice tridiagonale définie par :* $a_{i,i} = a,\ i = 1..n,\ a_{i,i-1} = 1\ i = 2..n,\ a_{i,i+1} = 1\ i = 1...n-1$ *où* $a$ *est un réel strictement positif. On sait que les valeurs propres de la matrice sont :*

$$\lambda_k = a - 2\cos(\frac{k\pi}{n+1}),\ k = 1,\ \dots,\ n$$

a ) *Pour quelles valeurs de* $a$ *la matrice* $A$ *admet une décomposition de Cholesky ?*

b) *Dans le cas où la factorisation de Cholesky* $A = T^tT$ *est possible, en déduire les formules permettant de calculer les coefficients de* $B$*. Écrire (en pseudo-langage) cet algorithme itératif.*

**Exercice** 4 *Soit* $A \in M_n(\mathbb{R})$ *telle que* $A^t$ *soit à diagonale strictement dominante. Montrer que* $A$ *admet une décomposition* $LU$ *avec* $L^t$ *à diagonale strictement dominante.*

**Exercice** 5 *Soit* $A \in M_n(\mathbb{R})$ *une matrice* $n \times n$ *inversible admettant une factorisation* $LU$ *òù* $L$ *est une matrice triangulaire inférieure à diagonale unité et* $U$ *une matrice triangulaire supérieure.*

1. *Montrez que cette factorisation est unique.*
2. *Montrez qu'il existe une unique factorisation* $A = LDL^t$ *òù* $L$ *est une matrice triangulaire inférieure à diagonale unité et* $D$ *une matrice diagonale inversible.*
3. *Montrez qu'une matrice* $A$ *admet une unique factorisation* $A = LDL^t$ *òù* $L$ *est une matrice triangulaire inférieure à diagonale unité et* $D$ *une matrice diagonale telle que* $D_{i,i} > 0,\ \forall i \in [1,\ n]$ *si et seulement si* $A$ *est symétrique définie positive.*
4. *En déduire que* $A$ *admet une unique factorisation de Cholesky* $A = BB^t$ *òù* $B$ *est une matrice triangulaire inférieure telle que* $B_{i,i} > 0,\ \forall i \in [1,\ n]$ *si et seulement si* $A$ *est symétrique définie positive.*