TD3 Analyse numérique 2019-2020

Exercice 1 1. *Calculer les transformées en z des suites suivantes :*

$$a.\ u_n = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n > m \\ e^{-n} & \text{si} \quad n \leq m \end{cases} \qquad b.\ u_n = \begin{cases} \frac{1}{n!} & \text{si } n \geq 1 \\ 0 & \text{si } n \leq 1 \end{cases} \qquad c.\ u_n = n^2.(causal)$$

2. *Soient $a \in \mathbb{C}$, $\omega \in \mathbb{R}^+$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathrm{N}}$ causal définie par $u_n = a^n \cos(n\omega)$. Calculer la transformée en z de la suite $(u_n)_{n\in\mathrm{N}}$.*

3. *Calculer la transformée en z de la suite $(u_n)_{n\in\mathrm{N}}$ causal définie par :* $u_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ pair} \\ 0 & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$

Exercice 2 1. *Trouver l'original de $F(z) = \frac{1}{z^2-1}$ à l'aide d'une décomposition en éléments simples puis à l'aide des séries entières.*

2. *Même question pour $F(z) = \frac{z}{z^2+z-2}$.*

Exercice 3 *Soit $\omega > 0$. Montrer que $u_n = \sin(\omega n)$, $n \in \mathbb{N}$, a pour transformée en z $F(z) = \frac{z\sin\omega}{z^2-2z\cos\omega+1}$. En déduire l'original de $G(z) = \frac{z^2}{z^2+z+1}$.*

Exercice 4 1. *On considère un système entrée-sortie numérique dont la fonction de transfert F est définie par $F(z) = H(10\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}})$ où $H(p) = \dfrac{4}{1+p}$*

L'entrée et la sortie du système numérique sont modélisés, resp, par deux suites causales x et y.

Ces deux suites admettent des transformées en Z notées, respectivement, $X(z)$ et $Y(z)$ telles que $Y(z) = F(z)X(z)$

(a) *Montrer que $F(z) = \frac{4(1+z^{-1})}{11-9z^{-1}}$*

(b) *En déduire que : $11Y(z) - 9z^{-1}Y(z) = 4X(z) + 4z^{-1}X(z)$*

(c) *En déduire que, pour tout nombre entier n supérieur ou égal à 0, on a :*

$$y(n) = \frac{9}{11}y(n-1) + \frac{4}{11}x(n) + \frac{4}{11}x(n-1)$$

2. *On suppose que, pour tout entier n, on a $x(n) = ne(n)$ où e est la suite échelon unité définie par : $e(n) = 0 \quad si \quad n < 0$ et $e(n) = 1 \quad si \quad n \geq 0$.*

(a) *Montrer que $Y(z) = \frac{4z(z+1)}{(11z-9)(z-1)^2}$*

(b) *Déterminer les réels A, B et C tels que $\frac{Y(z)}{z} = \frac{A}{11z-9} + \frac{B}{z-1} + \frac{C}{(z-1)^2}$*

(c) *En déduire $y(n)$ pour tout nombre entier naturel n.*

Exercice 5 *Soit un réel* $a \in]0,1[$ *et* $u(n)$ *l'échelon de Heaviside (ou échelon unité) :* $u(n) = \begin{cases} 1 \text{ pour } n \geq 0 \\ 0 \text{ pour } n < 0. \end{cases}$

1. *Déterminer la transformée en z du signal* $x(n) = a^n u(n)$, *avec* $|a| < 1$, *et préciser avec soin la région de convergence de* $X(z)$.
2. *Déterminer la transformée en z du signal* $y(n) = -a^n u(-n-1)$, *avec* $|a| < 1$, *et préciser avec soin la région de convergence de* $Y(z)$.
3. *Soit* b *un réel tel que* $b > a$ *et* $|b| < 1$. *On considère un système de fonction de transfert :*

$$H(z) = \frac{1}{(1 - az^{-1})(1 - bz^{-1})}$$

   Déterminer la réponse impulsionnelle $h(n)$ *du système dans les trois cas suivants :*

   (a) *la région de convergence de* $H(z)$ *est* $|z| < a$,

   (b) *la région de convergence de* $H(z)$ *est* $a < |z| < b$,

   (c) *la région de convergence de* $H(z)$ *est* $|z| > b$.

Exercice 6 *On considère un filtre de fonction de transfert :* $H(z) = \frac{1}{(1-az^{-1})(1-bz^{-1})}$
où a *et* b *sont deux réels* $\in]0,1[$ *tels que* $b > a$, $|a| < 1$ *et* $|b| < 1$.

1. *Quel est l'ordre du filtre défini par la fonction de transfert* $H(z)$ *?*
2. *Déterminer l'équation récurrente définissant le filtre dans le domaine temporel.*
3. *Quel type de filtre rationnel (RIF, RII) est défini par* $H(z)$ *? Justifiez votre réponse.*
4. *Le filtre défini par* $H(z)$ *est il stable ? Justifiez votre réponse.*
5. *Déterminer la réponse impulsionnelle* $h(n)$ *permettant de pouvoir réaliser le filtre.*