TD2 Analyse numérique:
Estimation du reste - Accélération de la convergence

Exercice 0.1 *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ une fonction positive intégrable et décroissante.*

1. *Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,*

$$\int_n^\infty f(x)\mathrm{d}x \leq \sum_{k=n}^{\infty} f(k) \leq \int_{n-1}^{\infty} f(x)dx.$$

2. *En déduire que la suite $x_n := \sum_{k=1}^{n} f(k)$ converge.*

3. *Estimez la vitesse de convergence de la suite $x_n = \sum_{k=1}^{n} k\mathrm{e}^{-k^2}$.*

4. *On note $x := \sum_{k=1}^{+\infty} k\mathrm{e}^{-k^2}$. Donner une valeur approchée de x à la précision 10^{-3}.*

Exercice 0.2 E *désigne le sous-ensemble de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ constitué des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergentes dont tous les termes sont différents de la limite de la suite à partir d'un certain rang;*

À toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E et de limite ℓ on associe la suite $(u_n^v)_{n\in\mathbb{N}}$ définie à partir d'un certain rang par $u_n^v = |\frac{u_{n+1}-\ell}{u_n-\ell}|$.

E^v désigne l'ensemble des éléments $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E tels que $(u_n^v)_{n\in\mathbb{N}}$ soit convergente;

1. *Montrer que E^v est non vide. L'ensemble E^v est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$?*

2. *Montrer que E^v est strictement inclus dans E.*

3. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un élément de E^v. Montrer que la limite associée l^vappartient au segment $[0, 1]$. Que voulons nous mettre en évidence par cette question?*

4. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que la vitesse de convergence est géométrique de rapport k. Montrer que $|u_n - \ell|$ est un $O((k')^n)$ pour un certain $k'\in]0, 1[$.*

5. *Donner une propriété similaire à la question 4. lorsque la convergence est d'ordre $r \succ 1$.*

6. *Etudier la convergence et la vitesse de convergence de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par:*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = (1 + \frac{1}{2^n})^{2^n}.$$

7. *On considère un réel $\alpha > 1$ et la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ associée à la série de Riemann. Etudier la vitesse de convergence de (S_n). Proposer une méthode d'accélération de la convergence.*

Exercice 0.3 *On rappelle le résultat suivant: Soit I un intervalle fermé de $\mathbb{R}$. $f : I- > I$ une application contractante, ie il existe $k \in [0, 1[$ tel que:*

$$\forall (x, y) \in I^2,\ |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|.$$

Alors f possède un unique point fixe l. De plus, toute suite définie par (S) $x_0 \in I,\ x_{n+1} = f(x_n)$ *converge vers cet unique point fixe, et on a les estimations suivantes :*

- $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - l| \leq k^n |u_0 - l|,$
- $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall p \in \{0, ..., n\},\ |e_n| = |u_n - l| \leq \frac{k^{n-p}}{(1-k)} |u_{p+1} - u_p|.$

1. *Soit* $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *et* α *un point fixe de f tel que* $0 <| f'(\alpha) |< 1$ *(*α *est dit point fixe attractif)*

   (a) *Montrer qu'il existe* $r > 0$*, tel que pour tout* $x_0 \in V = [\alpha - r, \alpha + r]$*, la suite définie par (S) converge vers* α*.*

   (b) *Montrer que la vitesse de convergence de* $(x_n)_n$ *est géométrique préciser son coefficient de convergence.*

2. *Supposons en plus qu'il existe un entier* $p \geq 2$ *tel que* $f \in C^p(V, \mathbb{R})$ *et*

$$f^{(p-1)}(\alpha) = 0,\ f^{(p)}(\alpha) \neq 0 \tag{1}$$

   Montrer que la convergence est exactement d'ordre p; on dit que α *est super-attractif.*

Exercice 0.4 *Soient f une fonction de classe* C^2 *sur un intervalle ouvert I et* α *une racine de l'équation* $f(x) = 0$*.*

1. ***(méthode de NEWTON)***

   (a) *On assume que si* $k = 1, 2;\ f^{(k)}(\alpha) \neq 0$*. Soit* $V \subset I$ *un voisinage* α *telle que la suite* $(x_n)_n$ *définie par:*

$$x_0 \in V,\ x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},\ n \in \mathbb{N} \tag{2}$$

   converge vers α*. Montrer que la suite* $(x_n)_n$ *converge de manière quadratique (i.e. d'ordre 2).*

   (b) *Dans cette question on suppose que* $f'(\alpha) = 0,\ f''(\alpha) \neq 0$*. Montrer que la suite donnée par (2) est encore bien définie dans un voisinage de* $V_1 \subset V$ *de* α *(privé de* α*), et converge de façon géométrique vers* α*.*

   ind: Considérez l'application g définie par $g(\alpha) = \alpha$ *et* $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ *si* $x \neq \alpha$

2. *Si* x_n *converge vers* α*, avec* $f'(\alpha) \neq 0, -1$ *et* $f''(\alpha) \neq 0$*. Montrer que la méthode de* ***NEWTON*** *modifiée*

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{g(x_n)},\ g(x_n) = \frac{f(x_n + f(x_n)) - f(x_n)}{f(x_n)}$$

   a également pour ordre de convergence 2. Quel est l'avantage de cette méthode par rapport à celle de ***NEWTON****?*

3. ***Application:*** *Considérons l'équation* $x(1+e^x) = e^x$.

   1. *Montrer que cette équation admet une unique solution* α *réelle dans* $[0;1]$.

   2. *Écrire la méthode de* ***NEWTON*** *pour approcher la solution* α. *Justifier l'expression de cette suite.*

   3. *Proposer une autre itération de point fixe pour approcher* α. *Montrer analytiquement que cette itération converge vers* α *pour tout* $x_0 \in [0;1]$ *et faire l'étude graphique de la convergence.*

   4. *Écrire l'algorithme "MAPLE" pour une convergence à* 10^{-6} *près, en admettant que les itérations s'achèvent dès que* $|x_{n+1} - x_n| \leq \epsilon :=$ *une tolérance fixée.*

Exercice 0.5 ***(Accélération de convergence)*** *Soit* f *une fonction de classe* C^2 *sur un voisinage fermé* I. *Pour calculer la racine* α *de l'équation* $f(x) = 0$, *on considère une méthode d'approximations successives* $x_{n+1} = F(x_n)$, $x_0 \neq \alpha$ *donné que l'on suppose convergente avec*

$$F(x) = f(x) + x \text{ et } \quad ||F'||_\infty = \sup_{x \in I} |F'(x)| = k < 1 \tag{3}$$

1. *On pose* $e_n = x_n - \alpha$. *Déterminer* $L := \lim_{n\to\infty} \frac{e_{n+1}}{e_n}$.

2. *On considère les suites* (ϵ_n) *et* $(\overline{x}_n)$ *définies respectivement par*

$$\epsilon_n = \frac{e_{n+1}}{e_n} - L \text{ et } \overline{x}_n = x_n - \frac{(x_{n+1} - x_n)^2}{x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n}. \tag{4}$$

   Déterminer $\frac{\overline{x}_n - \alpha}{x_n - \alpha}$ *en fonction de* L, ϵ_n *et* ϵ_{n+1} *et en déduire que les approximations (4),* $\overline{x}_n$ *convergent plus vite que les approximations* x_n.

3. *Application: On considère la fonction* $f(x) = x^3 - 3x + 2$ *et on souhaite trouver par approximations successives sa racine double 1.*

   (a) *Montrer que la méthode de Newton a une convergence linéaire mais pas quadratique et justifier pourquoi les théorèmes usuels ne s'appliquent pas.*

   (b) *On utilise maintenant la méthode (4) définie à partir de la méthode de Newton. Déterminer* $\frac{\overline{x}_{n+1} - \alpha}{\overline{x}_n - \alpha}$ *en fonction de* $\frac{x_{n+1} - \alpha}{x_n - \alpha}$. *Que gagne-t-on en vitesse de convergence ?*