Exos. Supplémentaires 2020-2021

Exercice 0.1 *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = x^3 - 2$. On veut approcher le zéro α de f par la méthode de point fixe suivante:*

$$\begin{cases} x_0 & \text{donné} \\ x_{k+1} = g_\omega(x_k) \end{cases} \quad \textit{pour} \quad \textit{tout } k \geq 0, \ \textit{(1)}$$

avec $g_\omega : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$g_\omega(x) = (1-\omega)x^3 + (1 - \frac{\omega}{3})x + 2(\omega - 1) + \frac{2\omega}{3x^2}, \ \omega \ \in \mathbb{R}.$$

1. *Pour quelles valeurs du paramètre ω la méthode de point fixe (1) est-elle consistante ($i.e.\alpha$ est un point fixe de g_ω)*
2. *Pour quelles valeurs du paramètre ω la méthode de point fixe (1.2) est d'ordre 2 ?*
3. *Existe-t-il des valeurs du paramètre ω pour lesquelles la méthode de point fixe (1.2) est-elle d'ordre 3 ?*

Correction 0.1 *Comme α est le zéro de f, on a $\alpha^3 = 2$.*

1. *La méthode de point fixe (1) est consistmte pour tout $\omega \in \mathbb{R}$ car*

$$\begin{aligned} g_\omega(\alpha) &= (1-\omega)\alpha^3 + (1 - \frac{\omega}{3}1^\alpha + 2(\omega - 1) + \frac{2\omega}{3\alpha^2} \\ &= (1 \ - (f))(\alpha^3 - 2) + (1 - \frac{\omega}{3})\alpha + \frac{2\omega}{3\alpha^2} \\ &= \alpha - \frac{\omega\alpha}{3} + \frac{2\omega}{3\alpha^2} = \alpha - \frac{\omega(\alpha^3 - 2)}{3\alpha^2} = \alpha. \end{aligned}$$

2. *La méthode de point fixe (1) est au moins d'ordre 2 si $g'(\alpha) = 0$. On a*

$$g_\omega'^2 + 1 \ - \frac{\omega}{3} - \frac{4\langle 0}{3\alpha^3} = 3(1 \ - \omega)\alpha^2 + 1 - \omega = (1 \ - \omega)(3\alpha^2 + 1)$$

donc la méthode de point Iixe (1) est au moins d'ordre 2 si $\omega = 1$.

3. *Pour que la méthode de point fixe (1) soit* d$^{\text{y}}$ordre 3 *il faudrait $g^{'}(\alpha) = g^{"}(\alpha) = 0$. Puisque $g'(\alpha) = 0$ si et seulement si*

$\omega = 1$ *et* $g_1^{"}(\alpha) = \frac{4\omega}{\alpha^4} \neq 0$, *il n'est pas possible d'avoir une convergence d'ordre supérieur à 2.*

Exercice 0.2 2*Soit* V_n *la matrice de VANDERMONDE:*

$$\mathrm{V}_n = \begin{pmatrix} 1 & a_0 & a_0^2 & . & . & . & a_0^n \\ 1 & a_1 & a_1^2 & & & & a_1^n \\ . & a_2 & a_2^2 & & & & a_{2]}^n \\ . & & . & \backslash & & & . \\ . & & . & & \backslash & & . \\ . & & . & & & \backslash & . \\ 1 & a_n & a_n^2 & . & . & . & a_n^n \end{pmatrix}$$

Quel est le lien entre cette matrice et l'interpolation polynomiale de l'ensemble de points $\{(a_i; b_i)\}_{i=0}^n$ *?*

Correction 0.2 *Soit* $p(X) = \sum_{j=0}^n c_j X^j$ *le seul polynôme de degré* n *qui interpole l'ensemble de* $(n+1)$ *points* $\{(a_i, b_i)\}_{i=0}^n$, *i.e.* $b_i = p(a_i) = \sum_{j=0}^n c_j a_i^j$. *Alors le vecteur* $\mathrm{c} = (c_0,\ c_1,\ \ldots,\ c_n)^T$ *est solution du système linéaixe* $V\mathrm{c} = \mathrm{b}$.

Exercice 0.3 *On considère l'intégrale*

$$I \ = \int_1^2 \frac{1}{x} \mathrm{d}x.$$

1. *Calculer la valeur exacte de* I.
2. *Évaluer numériquement cette intégrale par la méthode des trapèzes avec* $m = 3$ *sous-intervalles.*
3. *Pourquoi la valeur numérique obtenue à la question précédente est-elle supérieure à* $\ln(2)$*? Est-ce vrai quelque soit* m*? Iustifier la réponse. (On pourra s'aider par un dessin.)*
4. *Quel nombre de sous-intervalles* m *faut-il choisir pour avoir une erreur inférieure à* 10^{-4}*? On admettant que l'erreur théorique associée s'écrit, si* $f \in \mathcal{C}^2([a; b])$,

$$|E_{rr}| = |\frac{(b-a)^4}{12m^2} f''(\xi)|,\ \ \xi \ \in]a;\ b\ [.$$

Correction 0.3 *1. Une primitive de* $\frac{1}{x}$ *est* $F(x) = \ln(x)$*, La valeur exacte est alors* $I = [\ln(x)]_{x=1}^{x=2} = \ln(2)$.

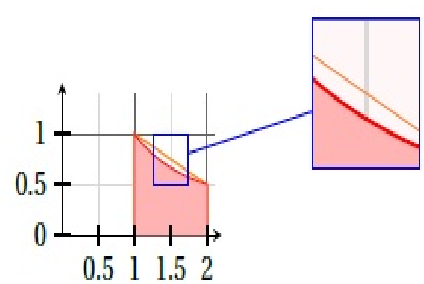
2. *La méthode des trapèzes composite à* $m+1$ *points pour calculer l'intégrale d'une fonction* f *sur l'*intervalle $[a,\ b]$s′écrit

$$\int_a^b f(t)dt \simeq h(\frac{1}{2}[f(a)+f(b)] + \sum_{i=1}^{m-1} f(a+ih)) \quad avec\ h = \frac{b-a}{m}.$$

Ici on a $f(x) = \frac{1}{x}$, $a = 1$, $b = 2$, $m = 3$ *d'où* $h = \frac{1}{3}$ *et on obtient*

$$I \simeq \frac{1}{3}\ (\frac{1}{2}f(1) + f(1+1/3) + f(1\ +2/3) + \frac{1}{2}f(2)) = \frac{1}{3}(\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{3}{5}+\frac{1}{4}) = \frac{21}{30} = 0,7.$$

3. *La valeur numérique obtenue à la question précédente est supérieure à ln (2) car la fonction* $f(x) = \frac{1}{x}$ *est convexe. On peut se convaincre à l'aide d'un dessin que les trapèzes sont au-dessus de la courbe* $y = 1/x$*, l'aire sous les trapèzes sera donc supérieure à l'aire sous la courbe. Pour bien visualiser la construction considérons* $m = 1$ *:*



Cela reste vrai quelque soit le pas h *choisi car la fonction est convexe ce qui signifie qu'une corde définie par deux points de la courbe* $y = 1/x$ *sera toujours au-dessus de la courbe et par le raisonnement précédant l'aire sous les trapèzes sera supérieure à l'aire exacte.*

4. *L'erreur est majorée par*

$$|E_{rr}| \leq \frac{(b-a)^4}{12m^2} \sup_{t\epsilon]a,b[} |f"(t)|.$$

Donc ici on a $f(x) = 1/x$, f'^2 et f'^3, ainsi

$$|E_{rr}| \leq \frac{1}{12m^2} \max_{t\in]1,2[} \frac{2}{t^3} = \frac{1}{6m^2}.$$

Pour que $|E_{rr}| < 10^{-4}$ il suffit que $\frac{1}{6m^2} < 10^{-4}$, i.e. $m > 10^2/\sqrt{6} \approx 40,8$. À partir de 41 sous-intervalles, l'erreur theorique est inférieure à 10^{-4}.

Exercice 0.4 *Écrire la méthode de NEWTON pour calculer la solution de l'équation*

$$\int_0^x e^{-t^2} \mathrm{dt} \ = \frac{1}{3}$$

en proposant une formule de quadrature.

Correction 0.4 *Soit $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \int_0^x e^{-t^2} \mathrm{dt} - \frac{1}{3}$. On cherche les zéros de cette fonction par la méthode de NEWTON:*

$$\begin{cases} x_0 = 0, \\ x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{\int_0^{x_n} e^{-\mathrm{t}^2} \mathrm{dt} - \frac{1}{3}}{e^{-x_n^2}}. \end{cases}$$

À chaque étape n il faut donc calculer $\int_0^{x_n} e^{-t^2} \mathrm{dt}$ qu'on peut approcher par exemple par la méthode du trapèze.

$$\int_0^{x_n} e^{-\mathrm{t}^2} \mathrm{dt} \simeq \frac{x_n}{2}(1 \ + e^{-x_n^2})$$

ce qui donne la suite

$$\begin{cases} x_0 = 0, \\ x_{n+1} = \frac{1}{2} x_n - \frac{1}{2} x_n e^{x_n^2} + \frac{1}{3} e^{x_n^2} \end{cases}$$