TD1 Analyse numérique 2019-2020

Exercice 1 *1. Former le développement en série entière de* $z \mapsto \frac{1-z\cos t}{1-2z\cos t+z^2}$, *pour* $|z|<1$ *et* $t \in]0;\pi[$.

2. Soient $a \in \mathbb{C}^*$ *et* $p \in \mathbb{N}$. *Former le développement en série entière de* $x \to \frac{1}{(x-a)^{p+1}}$.

3.a. Former le développement en série entière en 0 *de* $x \to \frac{1}{(1-x)(1-x^2)}$.

3.b. Soit $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ *vérifiant :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = u_{n+2} + u_{n+1} - u_n.$$

Exprimer le terme général de la suite (u_n) *en fonction de ses premiers termes.*

Exercice 2 *Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière* $\sum_{n\geq 0} \frac{(n+1)(n-2)}{n!} x^n$.

Exercice 3 *Soit* $f :]-a;a[\to \mathbb{C}$, *développable en série entière au voisinage de 0.*

1.a. Montrer que

$$\forall x \in]-a;a[,\ a \in \mathbb{R}^{+*} \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^n(0)}{n!} x^n.$$

1.b. En déduire que le développement en série entière d'une fonction f *est unique.*

Exercice 4 *On considère une fonction* f, *développable en série entière au voisinage de 0 de rayon de convergence* $R>0$, *on note* $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.

1. Montrer que pour tout $r \in [0;R[, \varphi : t \mapsto f(re^{it})$ *est définie et continue sur* $\mathbb{R}$.

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^{2\pi} f(re^{it}) e^{-int} dt = 2\pi a_n r^n$$

3. On suppose dans cette question que $R = +\infty$.

3.a. Si f *est bornée, montrer que* f *est constante.*

3.b. On suppose qu'il existe $A, B > 0$ *et* $c \in \mathbb{N}^*$, *tels que* $\forall z \in \mathbb{C}$, $|f(z)| \leq A + B|z|^c$. *Montrer que* f *est un polynôme.*