Contents

Chapter 1: CALCUL NUMÉRIQUE - ESTIMATION DU RESTE

1.1 Calcul numérique des series

Si la serie $\sum x_n$ est convergente, alors pour tout entier naturel n, la somme $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} x_k$ existe, et $\lim_{n\to+\infty} R_n = 0$. Le terme R_n se nomme le reste d'ordre n de la série $\sum x_n$.

Il est facile, par un procédé itératif, de calculer un terme de la suite des sommes partielles. La relation entre la somme partielle, la somme et le reste s'écrit

$$S = S_n + R_n$$

Ainsi, si on sait limiter le reste, la somme partielle peut être vue comme une valeur approchée de la somme, avec une incertitude connue. **C'est le principe du calcul numérique d'une somme de série.**

C'est la seule possibilité dans la plupart des cas. Les ordinateurs ont beau être rapides, ils ne peuvent pas faire un nombre infini d'opérations. On écrit donc :

$$S \ = \sum_{k=0}^{\infty} u_k \simeq \sum_{k=0}^{n} u_k = S_n$$

qui est calculable, d'autant plus facilement et correctement que n est petit. En revanche si on est obligé de prendre n grand, le calcul de U_n sera entaché d'un grand nombre d'erreurs d'arrondi, qui peuvent rendre le résultat médiocre.

erreur *théorique* d'approximation est:

$$\epsilon_n = |S \ - U_n| = |R_n|$$

On cherche à la majorer par une expression simple, de facon à pouvoir donner une CS sur n pour que 1'erreur soit acceptable. On remarque que le théorème des séries altemées, le théorème de D'Alembert et le théorème série-intégrale et fournissent une telle majoration.

1.1.1 Majoration du reste

1. **Série alternées.**

   La convergence de la série peut se montrer en utilisant le critère spécial des séries alternées.

   C'est le cas le plus simple puisqu'on a un théorème. Comme on sait que si $\sum u_n$ vérifie les conditions du critère spécial, $|R_n| \leqslant |u_{n+1}|$, on cherche simplement n tel que $|u_{n+1}| \leqslant \varepsilon$ et on calcule s_n. En plus, le théorème nous donne le signe de l'erreur qui est celui de u_{n+1}.

   Exemple 1.1 $s = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ *à* 10^{-2} *près. Il nous suffit* $\frac{1}{n+1} \leqslant 10^{-2}$, *c'est à dire* $n \geqslant 99$. $\sum_{n=1}^{99} \frac{(-1)^n}{n}$ *est une valeur approchée à* 10^{-2} *près de* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$. *Il suffit de calculer cette somme.*

   1. En introduisant le test:

      $st := time()$
      $s := 0; k := 1;$
      $while\ \frac{1}{k+1} >= 10^{-5} do$
      $s := s + \frac{(-1)^k}{k}; k := k + 1$
      $enddo;$
      $k - 1, s$
      $st := time() - st$

   2. calcul de la somme:

      $st := time()$
      $somme := proc(n)$
      $local\ s, k;$
      $s := 0;$
      $for\ k\ to\ n\ do$
      $s := \frac{(-1)^k}{k} + s\ end\ do$
      $end\ proc;$
      $somme(99)$
      $st := time() - st$

2. **Série comparable à une série géométrique positive**

   La convergence absolue de la série peut se montrer en utilisant le critère de d'Alembert.

   C'est souvent la méthode la plus rapide quand elle est applicable.

En effet: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=l<1$, d'où, à partir de N, $\dfrac{|u_{n+1}|}{|u_n|}\leqslant\lambda<1$, et donc, pour $n\geqslant N$, $|R_n|\leqslant\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty}|u_k|\leqslant\dfrac{\lambda^{n-N+1}}{1-\lambda}|u_N|$. Ceci permet le bon rang en majorant cette quantité par ε. Ce rang sera bien sûr au moins égal à N.

Exemple 1.2 *On cherche* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{1}{2^n+1}$ *à* 10^{-3} *prés. La convergence de cette série positive est facilement obtenue (par exemple) par équivalence avec une série géométrique. On a* $0\leqslant u_k\leqslant\dfrac{1}{2^k}$ *qui est le terme général d'une série convergente, et donc :* $0\leqslant\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty}u_k\leqslant\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty}\dfrac{1}{2^k}=\dfrac{\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{2^n}$. *Il suffit donc de chercher n tel que* $\dfrac{1}{2^n}\leqslant10^{-3}$, *c'est à dire* $2^n\geqslant10^3$ *ou enfin* $n\geqslant\dfrac{3\ln10}{\ln2}\simeq9,97$ *Donc* $n=10$ *convient,* $\sum\limits_{n=0}^{10}\dfrac{1}{2^n+1}$ *est une valeur approchée à* 10^{-3} *prés de* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{1}{2^n+1}$. *Il suffit donc de calculer cette somme.*

Série comparable à une intégrale de Riemann

La convergence absolue se montre en utilisant le critère de Riemann.

En effet: On a pour $n\geqslant N$, $|u_n|\leqslant\dfrac{K}{n^\alpha}$ avec $\alpha>1$, et donc, pour $n\geqslant N$, $|R_n|\leqslant\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty}\dfrac{K}{n^\alpha}\leqslant K\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty}\dfrac{1}{k^\alpha}$. Comme $\dfrac{1}{(n+1)^\alpha}\leqslant\displaystyle\int_n^{n+1}\frac{dt}{t^\alpha}$, on obtient : $|R_n|\leqslant K\int_n^{+\infty}\dfrac{dt}{t^\alpha}=\dfrac{K}{(\alpha-1)\,n^{\alpha-1}}$. Ceci permet le bon rang en majorant cette quantité par ε. Ce rang sera bien sûr au moins égal à N.

Exemple 1.3 *On cherche* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{1}{n^2+1}$ *à* 10^{-3} *prés. La convergence de cette série positive est facilement obtenue (par exemple) par comparaison avec une intégrale généralisée. En effet, f définie par* $f(t)=\dfrac{1}{t^2+1}$ *est positive, décroissante et d'intégrale convergente à l'infini. On a* $0\leqslant u_k\leqslant\displaystyle\int_{k-1}^{k}\frac{1}{t^2+1}\,dt$ *et donc* $0\leqslant\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty}u_k\leqslant\displaystyle\int_n^{+\infty}\frac{1}{t^2}\,dt=\frac{1}{n}$. *Il suffit donc de chercher n tel que* $\dfrac{1}{n}\leqslant10^{-2}$, *c'est à dire* $n\geqslant100$. *Donc* $n=100$ *convient,* $\sum\limits_{n=0}^{100}\dfrac{1}{n^2+1}$ *est une valeur approchée à* 10^{-2} *prés de* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{1}{n^2+1}$. *Il suffit donc de calculer cette* *somme.*

Exercice 1.1 *(a)*

(b) Rappeler le développement en série entière de $\arctan x$*, ainsi que le rayon de convergence R.*

(c) Que dire en x=R ? En déduire une expression de π *comme somme de série numérique.*

(d) Dans cette somme, combien de termes faut-il prendre en compte pour obtenir une valeur approchée de π *à* 10^{-2} *près?*

Autres majorations du reste

On pourra se baser sur:

3. **Reste de LAGRANGE**: $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta_{n,x} . x)}{(n+1)!} x^{n+1}$ avec $0 < \theta_{n,x} < 1$

4. **Représentation intégrale** : $R_n(x) = \int_0^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt = \frac{x^{n+1}}{n!}\int_0^1 f^{(n+1)}(\theta x)(1-\theta)^n d\theta$.

1.2 Accéleration de la convergence

1.2.1 Motivation

Exemple 1.4 *Calcul numérique de* $S = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-3}$ *(le calcul exact est difficile).*

1. $f : t \to t^{-3}$ *est positive, continue et décroissante sur* $[\,1, +\infty\,[$ *donc le théorème série-intégrale s'applique et donne :*

$$\int_{n+1}^{+\infty} t^{-3} dt \leq R_n \leq \int_n^{+\infty} t^{-3} dt \quad ie \quad \frac{1}{2(n+1)^2} \leq R_n \leq \frac{1}{2n^2}$$

L'inégalité de droite donne qu'une CS pour que 1'erreur soit $< 10^{-3}$ *est:* $\frac{1}{2n^2} < 10^{-3}$ *ie* $n^2 > 500$ *ie* $n \geq 23$

Ainsi $U_{23} = \sum_{k=1}^{23} k^{-3}$ *est une approximation de* $\zeta(3)$ *dont les 3 premières décimales sont correctes. Si on veut 9 décimales, une CS est:* $\frac{1}{2n^2} < 10^{-9}$ *ie* $n^2 > 5.10^8$ *ie* $n \geq 22361$

U_{22361} *est en théorie une approximation valable, mais en pratique ne le sera pas car on ajoute plus de* 10^4 *termes entachés chacun d'une erreur de* 10^{-12} *(si on fait le calcul en simple précision), soit une erreur totale de 1'ordre de* 10^{-8}*. Ainsi seules les 8*

premières décimales seront correctes.

2. On peut y remédier en faisant une petite accélération de convergence. L'idée est d'ajouter à U_n un terme correctif qui est l'estimation moyenne de R_n :

$$V_n = U_n + \frac{1}{2}(\frac{1}{2(n+1)^2} + \frac{1}{2n^2})$$

Ainsi :

$$S \ - V_n = R_n - \frac{1}{2}(\frac{1}{2(n+1)^2} + \frac{1}{2n^2}) = R'_n$$

avec :

$$\frac{1}{2(n+1)^2} - \frac{1}{2}(\frac{1}{2(n+1)^2} + \frac{1}{2n^2}) \leq R'_n \leq \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{2}(\frac{1}{2(n+1)^2} + \frac{1}{2n^2})$$

On obtient Finalement:

$$-\frac{2n+1}{4n^2(n+1)^2} \leq R'_n \leq \frac{2n+1}{4n^2(n+1)^2}$$

puis $|R'_n| \leq \frac{1}{2n^3}$

Une CS pour que V_n fournisse S avec 9 décimales est donc :$\frac{1}{2n^3} < 10^{-9}$ *ie* $n^3 > 5.10^8$ *ie* $n \geq 794$

V_{794} est en théorie une approximation valable, entachée d'une erreur inférieure à $10^3 10^{-12} = 10^{-9}$, donc valable en pratique aussi.

1.2.2 Domination, négligeabilité et équivalence

Dans toute cette section,on considère des suites dont le terme général est non nul au voisinage de l'infini (c'est à dire a partir d'un certain entier n_0).

1. (Suite dominée par une autre)

   Soient (u_n) et (v_n) deux suites à valeurs réelles ou complexes.

   On dit que la suite (u_n) est *dominée* par la suite (v_n) si la suite de terme général $\frac{u_n}{v_n}$est bornée.

   On note $u_n = O(v_n)$ et on prononce : u_n est un grand O de (v_n).

2. (Suite négligeable devant une autre)

   Soient (u_n) et (v_n) deux suites à valeurs réelles ou complexes.

   On dit que (u_n) est négligeable devant (v_n) si $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 0$

   On note alors : $u_n = o(v_n)$ et on prononce : u_n *est un petit o de* (v_n)

3. (Suite équivalente à une autre)

   Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites à valeurs réelles ou complexes.

   On dit que la suite $(u_n)_n$ est *équivalente* à $(v_n)_n$ si $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$.

   On note alors : $u_n \sim v_n$.

Exemple 1.5 *Soient* $(\alpha, \beta,\ a$ *des réels tels que:* $\alpha > 0, \beta > 0$ *et* $a > 1$ *alors:*

- $(ln(n))^\beta = o(n^\alpha)$.
- $n^\alpha = o(a^n)$.
- $a^n = o(n!)$.
- $n! = o(n^n)$.
- $(1 + \frac{1}{n})^n \sim e$.
- $n! \sim (\frac{n}{e})^n \sqrt{2\pi n}$ *(stirling)*

1.2.3 Vitesse de convergence d'une suite

On considère une suite $(u_n)_n$ qui converge vers un réel l. Cette suite peut converger plus ou moins rapidement vers sa limite.

Lorsqu'on étudie une suite (u_n), notre but est souvent de savoir si cette suite converge vers une limite l. Cela est très intéressant en soi, mais bien souvent cette limite est une constante importante en mathématiques et en physique.

Pratiquement, il est parfois important d'avoir une valeur approchée de cette constante. Les valeurs prises par la suite sont une bonne valeur approchée, mais à partir de quel rang pourra-t-on être satisfait de l'approximation donnée? On est donc amené à étudier le comportement de $|u_n - l|$: cette quantité désigne la vitesse de convergence de la suite.

Si l'on considère la différence $|u_n - l|$, cette différence peut être inférieure à un réel donné à partir d'un rang N plus ou moins grand. Par exemple,on peut trouver $|u_n - l| < 10^{-2}$ à partir de $N = 10$ ou bien $|u_n - l| < 10^{-2}$ à partir de $N = 100$. La vitesse est différente dans ces deux cas.

Etudier la vitesse de convergence de la suite (u_n) vers l, c'est essayer de comparer $u_n - l$ à une suite de référence, par exemple préciser si c'est un $O(\frac{1}{n^a})$, un $o(\frac{1}{n^a})$, un $O(\alpha^n), \ldots$ ou mieux donner un équivalent ou un dévelopement asymptotique.

Accélérer le convergence de la suite, c'est construire à partir de la suite (u_n) une suite (v_n) telle que $(v_n - l)$ converge plus vite vers 0 que $(u_n - l)$.

On trouve dans la littérature mathématique différentes dé finitions pour caractériser la vitesse de convergence. Par exemple,

1. lente s'il existe $(a,\ N,\ C) \in \mathbb{R}_-^* \times \mathbb{N} \times \mathbb{R}_+^*$ tels que $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N \Rightarrow |u_n - l| \geq Cn^a$,

2. géométrique s'il existe $(q,\ N,\ C) \in]0,1[\times \mathbb{N} \times \mathbb{R}_+^*\ /\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N \Rightarrow |u_n - l| \leq Cq^n$,

3. quadratique s'il existe $(q,\ N,\ C) \in]0,1[\times \mathbb{N} \times \mathbb{R}_+^*\ /\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N \Rightarrow |u_n - l| \leq Cq^{2^n}$.

Nous choisissons dans note cours la deuxième version suivante:

Si la suite $(|\frac{u_{n+1} - l}{u_n - l}|)_n$ est convergente de limite λ. Les différents cas ci-dessous peuvent se produire:

1. *Si $\lambda = 1$, la convergence de $(u_n)_n$ est lente.*

2. *Si $0 < \lambda < 1$, la convergence est dite géométrique* de rapport λ .

3. *Si $\lambda = 0$, la convergence est rapide*

© On appelle le coefficient λ lorsqu'il existe le coefficient de convergence de la suite $(u_n)_n$.

Exemple 1.6 ***Vitesse de convergence de quelques suites de référence***

Chacune des suites ci-dessous converge vers 0 et on a:

1. $u_n = a^n$ *avec* $0 < |a| < 1$, $|\frac{u_{n+1}}{u_n}| = |a| < 1$*et la convergence est géométrique de rapport* $|a|$.

2. $u_n = \frac{1}{n^b}$ *avec* $b > 0$, on *a:* $|\frac{u_{n+1}}{u_n}| = (\frac{n}{n+1})^b \underset{n \to \infty}{\to} 1$, *et la convergence est alors lente.*

3. $u_n = \frac{1}{ln(n)}$, *on a:* $|\frac{u_{n+1}}{u_n}| = \frac{ln(n+1)}{ln(n)} = 1 + \frac{ln(1+1/n)}{ln(n)} \underset{n\to\infty}{\to} 1$, *et la convergence est lente.*

4. $u_n = \frac{1}{n!}$, *on a:* $|\frac{u_{n+1}}{u_n}| = \frac{1}{n+1} \underset{n\to\infty}{\to} 0$,*la convergence est alors rapide.*

5. *Si l'on a un développement asymptotique de la forme:* $x_n = \alpha + \beta.\lambda^n + o(\lambda^n)$ *avec* β *non nul et* λ *dans* $]-1,1[$ *la convergence de la suite* (x_n) *vers* α *est géométrique de rapport* $|\lambda|$.

Remarque 1.1 *Une suite convergente n'a pas nécessairement une vitesse de convergence.*

Soit p un entier non nul, $u_n = \begin{cases} \frac{1}{n} \text{ si n = 2p } \textit{et } p \in \mathbb{N}^* \\ \frac{2}{n} \text{ si n = 2p + 1 } \textit{et } p \in \mathbb{N} \end{cases}$

Puisque $|u_n| \leq \frac{2}{n}$, pour *tout* $n \geq 1$, on *voit que cette suite converge vers* 0 *et on a:*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \begin{cases} \frac{2n}{n+1}, & \textit{si } \text{n = 2p } \textit{et } p \in \mathbb{N}^* \\ \frac{n}{2(n+1)}, & \textit{si } \text{n = 2p + 1 } \textit{et } p \in \mathbb{N} \end{cases}$$

La suite $(\frac{u_{n+1}}{u_n})_n$ *est donc divergente,et alors* $(u_n)_n$ *n'a pas de vitesse de convergence.*

L'exemple précédent montre également qu' une majoration de type $|u_n - l| \leq \frac{C}{n^b}$ *ne permet pas nécessairement d'avoir des informations sur la vitesse de convergence de la suite* $(u_n)_n$.

1.2.4 Comparaison de la vitesse de convergence de deux suites

Il est parfois intéressant de comparer la vitesse de convergence de deux suites, pour savoir laquelle converge le plus vite. Les informaticiens font cela souvent, sans même le savoir, en comparant le comportement asymptotique de leur complexité algorithmique.

La suite (v_n) *converge vers* ℓ *plus vite que la suite* (u_n) *si*

$$\lim_{n\to\infty} |\frac{v_n - \ell}{u_n - \ell}| = 0.$$

Exemple 1.7 *Les suites de références auxquelles on compare les suites sont les suivantes :*

Convergence lente	*Convergence géométrique*	*Convergence rapide*
$u_n = \frac{1}{(\ln n)^a},\ u_n = \frac{1}{n^a} \quad a > 0$	$u_n = \lambda^n$, *avec* $0 < \lambda < 1$	$u_n = \frac{1}{n!},\ u_n = \frac{1}{n^n}$

Chaque suite converge plus rapidement que les précédentes. On peut déterminer si une suite converge lentement, rapidement ou de manière géométrique en la comparant aux suites du tableau.

Exemple 1.8 *Soit C une constante strictement positive:*

1. *Si $|u_n - l| \sim \frac{C}{n^b}$ alors la convergence est lente.*
2. *Si $|u_n - l| \sim \frac{C}{n!}$ alors la convergence est rapide.*
3. *Si $|u_n - l| \sim C\lambda^n$ alors la convergence est géométrique de rapport λ.*

1.2.5 Ordre de convergence d'une suite

Soit une suite non stationnaire $(u_n)_n$ *qui converge vers l. On appelle ordre de convergence d'une suite $(u_n)_n$ le réel $p > 0$*, que l'on appellera ordre de la suite (x_n), tel que l'on puisse trouver C>0 pour lequel

$$|x_{n+1} - \ell| \sim C|x_n - \ell|^p.$$

1. Si $r = 2$, on dit que la convergence de $(u_n)_n$ est quadratique.
2. Si $r = 3$, on dit que la convergence de $(u_n)_n$ est cubique.
L'ordre mesure la rapidité de convergence d'une suite.
Plus l'ordre est supérieur, plus la vitesse est grande.

Conséquences 1.1 *1. Lorsqu'une suite convergente possède un ordre, tous ses termes sont distincts de la limite à partir d'un certain rang.* ***En effet****, pour n assez grand,*

$$|x_{n+1} - \ell| = \epsilon_n |x_n - \ell|^p,$$

avec $\in_n > 0$. Alors, si l'on avait $x_n = \ell$, on obtiendrait aussi $x_{n+1} = \ell$, et la suite serait stationnaire.

2. ***Unicité de l'ordre****: Supposons que l'on ait à la fois*

$|x_{n+1} - \ell| \sim C|x_n - \ell|^p$ *et* $|x_{n+1} - \ell| \sim K|x_n - \ell|^q$,

avec $p > q$, alors $C|x_n - \ell|^p \sim K|x_n - \ell|^q$, d'où, puisque $x_n - \ell$ ne s'annule plus à partir d'un certain rang,

$$C|x_n - \ell|^{p-q} \sim K.$$

Comme le membre de gauche tend vers zéro, on obtient une contradiction.

Remarque 1.2 *1. Supposons que* $\lim_{n\to+\infty} \frac{|u_{n+1}-l|}{|u_n-l|^r} = \lambda$ *avec* $r \geq 2$ *et* $0 < \lambda < \infty$ *alors* $\left|\frac{u_{n+1}-l}{u_n-l}\right| \sim \lambda|u_n - l|^{r-1}$, c*'est à dire, la convergence est rapide.*

2. Une convergence rapide n'est pas nécessairement d'ordre comme le montre l'exemple de la suite définie par : $u_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!}$

En effet, *la formule de Taylor-Lagrange nous dit que pour tout* $n \geq 1$, il *existe un réel* $c_n \in [0,1]$ *tel que:* $e - u_n \sim \frac{e^{c_n}}{n!}$
ce qui donne: $0 < \frac{e-u_{n+1}}{e-u_n} = \frac{1}{n+1}\frac{1}{e^{c_n}}e^{c_{n+1}} < \frac{e}{n+1} \underset{n\to\infty}{\to} 0$ *et la convergence est rapide. Par contre, elle n'a pas d'ordre car pour tout* $r \geq 2$*,on a:*

$$\frac{e-u_{n+1}}{(e-u_n)^r} \sim \frac{(n!)^r}{(n+1)!}\frac{e^{c_{n+1}}}{e^{r.c_n}} = \frac{(n!)^{r-1}}{(n+1)}\frac{e^{c_{n+1}}}{e^{r.c_n}} \underset{n\to\infty}{\to} \infty$$

et la convergence ne peut être d'ordre r*.*

3. *Dans la pratique, on espère rarement obtenir une convergence plus que quadratique, qui est déjà très satisfaisante. Une telle vitesse de convergence correspond à un doublement du nombre de chiffres précis à chaque étape, et donc typiquement une approximation de la limite à 30 décimales correctes après seulement 5 pas, si la valeur initiale est convenablement choisie. Un exemple célèbre de méthode qui converge quadratiquement est celui de la méthode de Newton (Voir TD2).*

4. *Si, à partir d'un certain rang, le nombre* x_n *est différent de* ℓ*, alors la suite est d'ordre* p *si et seulement si la suite* $(|x_{n+1} - \ell|/|x_n - \ell|^p)$ *admet une limite finie non nulle.*

5. *Si* $|x_n - \ell| \sim |y_n - \ell|$*, les suites* (u_n) *et*(v_n) *ont le même ordre s'il existe.*

6. *Si* (x_n) *est ordre* p*, il en est de même de* (λx_n) *pour tout nombre non nul* λ*.*

Exemple 1.9 1. *Lorsque* α *est strictement positif, la suite* $(n^{-\alpha})$ *est d'ordre 1 puisque* $x_{n+1} \sim x_n$*.*

2. *Lorsque* $|\alpha| < 1$*, la suite* (α^n) *est d'ordre 1 également puisque* $|x_{n+1}| = |\alpha||x_n|$*.*

3. *Lorsque* $|\alpha| < 1$*, la suite* (α^{p^n}) *est d'ordre* p *puisque* $|x_{n+1}| = |x_n^p|$*.*

Proposition 1.1 *Soit une suite* (x_n) *d'ordre* p *de limite nulle et* (y_n) *une suite convergente de limite* ℓ*. La suite* $(x_n y_n)$ *est d'ordre* p *dans les deux cas suivants:*

1. *la limite* ℓ *est non nulle*

2. *la limite* ℓ *est nulle et* (y_n) *est d'ordre* p*.*

Preuve.

1. Si $|x_{n+1}| \sim C|x_n|^p$, alors, $|x_{n+1}y_{n+1}| \sim C|y_{n+1}||x_n|^p$, et si ℓ est non nulle

$$|x_{n+1}y_{n+1}| \sim C\frac{|y_{n+1}|}{|y_n|^p}|x_n y_n|^p \sim \frac{C}{|\ell|^{p-1}}|x_n y_n|^p.$$

2. Si ℓ est nulle et si (y_n) est d'ordre p, on a $|y_{n+1}| \sim C'|y_n|^p$, donc

$$|x_{n+1}y_{n+1}| \sim CC'|x_n y_n|^p$$

Dans les deux cas $(x_n y_n)$ est d'ordre p.

1.2.6 Accélération de la convergence

Introduction: Étant donnée une suite $(S_n)_n$ qui converge vers S, il est évident qu'on se pose les deux questions suivantes:

- Quelle est la vitesse de convergence de $(S_n)_n$?
- S′i1 s'avère que cette vitesse est faible, comment peut on l'améliorer ?

En effet, la réponse à la première question n'est pas très compliquée, il convient de chercher le développement asymptotique de la suite $(S_n)_n$ (autrement dit, la décomposition de son terme général en somme de " terme simples" ordonnés par négligeabilité croissante). Par contre, une réponse à la deuxième question nécessite tout un travail dont le principe est assez simple.

Le principe d'accélération de la convergence consiste à construire une nouvelle suite $(T_n)_n$ qui, lorsqu'elle converge,va tendre vers la même limite de $(S_n)_n$ mais d'une manière plus rapide. i.e.

$$(T_n - S) \ = o(S_n - S) \ i.e \quad \lim_{n\to\infty} \frac{T_n - S}{S_n - S} = 0.$$

On dit dans ce cas, qu'on a accéléré la convergence de $(S_n)_n$, et la méthode qui transforme $(S_n)_n$ en $(T_n)_n$ est appelée, méthode d'accélération de convergence. On note $T : (S_n) \to (T_n)$ ce procédé (Transformation)

Questions: On se pose alors les deux questions suivantes:

1. Si (T_n) converge, sa limite est-elle la même que celle de la suite (S_n)?
2. La suite (T_n) converge-t-elle plus vite que (S_n) ?

Exemple 1.10 ***Exemples d'accélération de convergence:***

1. *On considère la transformation T définie par :*

$$T_n = \frac{1}{2}(S_{n+1} + S_n), \ n = 0, 1, \ \cdots$$

Il est évident que, quelle que soit la suite (S_n) convergente,la suite (T_n) ainsi obtenue converge et converge vers la même limite S que la suite (S_n).

On a:

$$\frac{T_n - S}{S_n - S} = \frac{1}{2}(\frac{S_{n+1} - S}{S_n - S} + 1)$$

Par conséquent,cette transformation n'accélère la convergence que des suites telles que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_{n+1} - S}{S_n - S} = -1.$$

Cette transformation de suites transforme donc toute suite convergente en une suite qui converge vers la même limite,mais elle n'est capable d'accélérer la convergence que d'une classe très restreinte de suites.

2. *On considère la suite définie par:*

$$\forall n \geq 1,\ \ S_n = (1 + \frac{1}{n})^n$$

La suite $T_n = S_{2^n}$ *est une suite accélératrice de* S_n.

En effet,

$$e - S_n \sim \frac{e}{2n}\ , \quad e - T_n \sim \frac{e}{2^{n+1}}$$

de sorte que: $\lim_{n\to\infty} \frac{T_n - e}{S_n - e} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^n} = 0$. *Le rapport* $\frac{T_n - e}{S_n - e}$ *tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini, donc la suite* $(T_n)_n$ *accélère* $(S_n)_n$.

De manière plus générale, si $(S_n)_n$ *a un développement asymptotique de la forme:*

$$S_n = S + \frac{\beta}{n^b} + o(\frac{1}{n^b})$$

avec β *non nul,* $b > 0$ *et* T *la transformation* $T : (S_n) \to (T_n) = (S_{2^n})$ *:*

$$T_n = S_{2^n} = S + \frac{\beta}{(2^n)^b} + o(\frac{1}{(2^n)^b})$$

alors,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{T_n - S}{S_n - S} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^b}{2^{nb}} = 0.$$

Cette extraction permet donc d'accélérer la convergence de la suite $(S_n)_n$.

Mais l'extraction ne permet pas toujours d'accélérer la convergence d'une suite. Par exemple, étant donné la suite: $S_n = \frac{1}{\ln(n)}$ *et* $T_n = S_{n^2} = \frac{1}{\ln(n^2)}$. *On a:* $\lim_{n\to\infty} \frac{T_n - 0}{S_n - 0} = \frac{1}{2} \neq 0$.

1.2.7 Méthodes numériques d′accélération de convergence: Extrapolation de Richardson

Présentation du principe:

1. **Cas particulier:**

On suppose que la suite (S_n) converge vers S et que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_{n+1}-S}{S_n-S} = k \text{ avec } 0 < k < 1$$

Alors la suite (T_n) deffinie par $T_n = \frac{S_{n+1}-kS_n}{1-k}$, converge vers S plus vite que la suite (S_n).

Preuve. Il suffit de traduire l'hypothèse $\lim_{n\to\infty} \frac{S_{n+1}-S}{S_n-S} = k$ par:

$S_{n+1} - S = (k + o(1))(S_n - S)$ où $o(1)$ tend vers 0. lorsque n tend vers ∞.

On a alors $\frac{S_{n+1}-kS_n}{1-k} - S = (S_n - S)o(1)$, ce qui implique le résultat.

Exemple 1.11 *Appliquer cette méthode à la suite $u_n = 2^n \sin\frac{\pi}{2^n}$ (pour laquelle $k = \frac{1}{4}$). La suite*

$$v_n = \frac{u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4u_{n+1} - u_n}{3},$$

tend vers π plus vite que la suite (u_n).

2. **Une première variation:** *Soit (u_n) une suite de nombres réels qui converge vers a. On suppose que*

$u_n = a + \lambda k^n + o(k^n)$

avec $\lambda \in \mathbb{R},\ \lambda \neq 0$ *et* $|k| < 1$, *de sorte que la converge ce de (u_n) vers a es t géom étriqıe de rapport k. On pose*

$$u'_n = \frac{u_{n+1} - ku_n}{1-k}.$$

Alors, $u'_n - a$ est un $o(k^n)$ et donc u'_n converge vers a avec une convergence qui est (au moins) géométriqıe de rapport k.

Approximation de π. Soit $u_n = 2^n \sin\frac{\pi}{2^n}$. Pour appliquer la méthode de Richardson, il suffit de développer $\sin x$ au voisinage de 0 :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{n!} + o(x^{2n+1}).$$

On en déduit :

$$u_n = 2^n \sin\frac{\pi}{2^n} = \pi - \frac{\pi^3}{6}\frac{1}{4^n} + o(\frac{1}{4^n})$$

avec $k = \frac{1}{4}$, $\lambda = -\frac{\pi^3}{6}$, (on notera que le coefficient λ n'est pas "connu" puisqu'il fait intervenir π que l'on cherche justement à calculer). Bien entendu, comme on connait le développement du sinus à un ordre quelconque on peut itérer la méthode (les valeurs suivantes des k_i sont 1/16 et 1/64). Voici un exemple des résultats numériques ainsi obtenus (rappelons que l'on a, en réalité, $\pi \simeq 3,141592654$) :

Avec $u_n = 2^n \sin \frac{\pi}{2^n}$ elle même:

$u_2 = 2,828427125$, $u_3 = 3,061467459$, $u_4 = 3,121445152$, $u_5 = 3,136548523$,

avec $T_n^1 = (4u_{n+1} - u_n)/3$ (première suite de Richardson) :

$T_2^1 = 3,13914757$, $T_3^1 = 3,141437716$, $T_4^1 = 3,14158298$, $T_5^1 = 3,141591892$,

avec $T_n^2 = (16T_{n+1}^1 - T_n^1)/15$ (Richardson 2):

$T_2^2 = 3,141590392$, $T_3^2 = 3,141592664$, $T_4^2 = 3,141592486$,

enfin, avec $T_n^3 = (64T_{n+1}^2 - T_n^2)/63$ (Richardson 3) :

$T_2^3 = 3,1415927$, $T_3^3 = 3,141592483$.

On notera que la meilleure valeur est donnée par T_3^2 (les erreurs dans les suivantes proviennent sans doute des erreurs d'arrondis des calculatrices qui sont amplifiées par les multiplications, notamment par 64).

3. **Une deuxième variation** Étant donné une suite dont le développement asymptotique est de la forme:

   $S_n = S + \beta\lambda^n + \gamma\mu^n + o(\mu^n)$. (4.1)

   avec β et γ non nuls et $0 < |\mu| < |\lambda| < 1$. La suite $(S_n)_n$ converge donc vers S et la

   convergence est géométrique de rapport λ.

   (a) Si on connait explicitement les coefficients β et λ, on peut accélérer la convergence de la suite $(S_n)_n$ en la remplacant par la suite $(T_n)_n$ définie par :

   $$T_n = T(S_n) = S_n - \beta\lambda^n$$

   Cette suite converge bien vers S avec $T_n - S \sim \gamma\mu^n$, la convergence est donc géométrique de rapport μ et:

   $$\frac{T_n - S}{S_n - S} \sim \frac{\gamma}{\beta}(\frac{\mu}{\lambda})^n \to_{n\to+\infty} 0$$

   Ce qui confirme bien que la suite $(T_n)_n$ converge plus vite que la suite $(S_n)_n$.

(b) Si on connait explicitement le coefficient λ, mais pas le coefficient β, on peut définir un barycentre de S_{n+1} et S_n où le coefficient $\beta\lambda^n$ sera éliminé. Pour ce faire,on écrit que:

$$S_{n+1} = S + \beta\lambda^{n+1} + \mu^{n+1}(\gamma + o(1))$$

$$S_n = S + \beta\lambda^n + \mu^n(\gamma + o(1))$$

alors :

$$S_{n+1} - \lambda S_n = (1-\lambda)S + \mu^n((\mu - \lambda)\gamma + o(1)).$$

Ce qui nous amène à introduire la suite $(T_n)_n$ définie par:

$$T_n = \frac{S_{n+1} - \lambda S_n}{1-\lambda}.$$

dont la convergence est géométrique de rapport μ. Puisque

$$\frac{T_n - S}{S_n - S} \sim \frac{\mu - \lambda}{1-\lambda}\frac{\gamma}{\beta}(\frac{\mu}{\lambda})^n \to_{n\to+\infty} 0.$$

$(T_n)_n$ accélère donc la convergence de (S_n).

Itération de la méthode de Richardson

La méthode de Richardson consiste à itérer le procédé précédent dès que l'on dispose d'un développement asymptotique de la forme:

$$S_n = S + \sum_{j=1}^{p+1} \beta_j \lambda_j^n + o(\lambda_{p+1}^n).$$

où p est un entier naturel non nul, et les coefficient β_j sont tous non nuls et les coefficients λ_j tels que:

$0 < |\lambda_{p+1}| < |\lambda_p| < \cdots < |\lambda_1| < 1.$

(a) Si tous les coefficients λ_j et β_j sont connus, on peut accélérer la convergence de cette suite en introduisant la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par: $T_n = S_n - \sum_{j=1}^{p+1} \beta_j \lambda_j^n$

Ce cas se présente pour les sommes des séries numériques de la forme $\sum_{n=0}^{\infty} f(n),$ où la fonction f est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$.

(b) Si les coefficients λ_j sont tous connus, mais pas les coefficients $\beta_j,$ on va les éliminer progressivement en itérant le procédé barycentrique définit précédemment. On introduit alors pour tout k compris entre 0 et $p,$ 1es suites $(S_n^{(k)})$ définies par:

$$\begin{cases} S_n^{(0)} &= S_n \\ S_n^{(k)} &= \frac{S_{n+1}^{(k-1)} - \lambda_k S_n^{(k-1)}}{1-\lambda_k} \end{cases}$$

l'exposant k réfère à la k ième suite générée, tandis que l'indice n désigne le n-ième terme de la suite $(S^{(k)})$.

Pour pouvoir itérer la méthode de Richardson, on présente le Théorème suivant :

Théorème 1.1 *(Théorème de Richardson)*

Avec les notations et hypothèses qui précèdent,

(a) *Soit p un entier non nul. Pour tous k compris entre 0 et p, on a le développement asymptotique*:

$$S_n^{(k)} = S + \sum_{j=k+1}^{p+1} \beta_j^{(k)} \lambda_j^n + o(\lambda_{p+1}^n).$$

Avec

$$\beta_j^{(k)} = \beta_j^{(k-1)} \frac{\lambda_j - \lambda_k}{1-\lambda_k}, \quad j \geq k+1$$

(b) On a:

$$\beta_{k+1}^{(k)} = \beta_{k+1} \prod_{j=1}^{k} \frac{\lambda_{k+1} - \lambda_j}{1-\lambda_j}$$

(c) Pour tout entier k *entre* 1 *et* p*, la suite* $(S_n^{(k)})_n$ *converge plus rapidement que la suite* $(S_n^{(k-1)})_n$ *La convergence de* $(S_n^{(k)})_n$ *est géométrique de rapport* λ_{k+1} *et plus précisément, pour tout* k *compris entre* 0 *et* p*, on a :*

$$S_n^{(k)} - S \sim \beta_{k+1}^{(k)} \lambda_{k+1}^n$$

Preuve.

(a) Procédons par récurrence sur k :
Pour $k = 0$, $S_n^{(0)} = S_n = S + \sum_{j=1}^{p+1} \beta_j \lambda_j^n + o(\lambda_{p+1}^n)$
Supposons que le résultat est vraie jusqu'à l'ordre $(k-1)$ et montrons-la à l'ordre k : On a alors:

$$S_{n+1}^{(k-1)} = S + \sum_{j=k}^{p+1} \beta_j^{(k-1)} \lambda_j^{n+1} + o(\lambda_{p+1}^{n+1})$$

$$S_n^{(k-1)} = S + \sum_{j=k}^{p+1} \beta_j^{(k-1)} \lambda_j^n + o(\lambda_{p+1}^n)$$

ce qui implique :

$$\begin{aligned} S_n^{(k)} &= \frac{(1-\lambda_k)S + \sum_{j=k+1}^{p+1} \beta_j^{(k-1)} \lambda_j^n (\lambda_j - \lambda_k) + o(\lambda_{p+1}^n)}{1-\lambda_k} \\ &= S + \sum_{j=k+1}^{p+1} \beta_j^{(k-1)} \frac{\lambda_j - \lambda_k}{1-\lambda_k} \lambda_j^n + o(\lambda_{p+1}^n). \end{aligned}$$

En posant $\beta_j^{(k)} = \beta_j^{(k-1)} \frac{\lambda_j - \lambda_k}{1-\lambda_k}$, on trouve exactement ce qui est demandé.

(b)

$$\begin{aligned} \beta_{k+1}^{(k)} &= \frac{\lambda_{k+1}-\lambda_k}{1-\lambda_k} \frac{\lambda_{k+1}-\lambda_{k-1}}{1-\lambda_{k-1}} \ . \ . \ . \ \frac{\lambda_{k+1}-\lambda_1}{1-\lambda_1} \beta_{k+1}. \\ &= \beta_{k+1} \prod_{j=1}^{k} \frac{\lambda_{k+1}-\lambda_j}{1-\lambda_j}. \end{aligned}$$

(c) On a $S_n^{(k)} - S \sim \beta_{k+1}^{(k)} \lambda_{k+1}^n$

D'où,

$$\frac{S_n^{(k)} - S}{S_n^{(k-1)} - S} \sim_\infty \frac{\beta_{k+1}^{(k)}}{\beta_k^{(k-1)}} \left(\frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k}\right)^n \underset{n\to\infty}{\rightarrow} 0$$