

UNIVERSITÉ IBN TOFAIL
ÉCOLE NATIONALE DES SCIENCES APPLIQUÉES:
ANALYSE NUMÉRIQUE

Pr. Mohammed Sahnoudi

2019-2020

Table des matières

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | | 5 |
| 2 | | 7 |
| 3 | | 9 |
| 4 | | 11 |
| 5 | Système linéaire $AX = b$: Méthodes Directes | 13 |
| 5.1 | Introduction | 13 |
| 5.1.1 | Vandermonde et interpolation de Lagrange | 13 |
| 5.1.2 | Motivation | 14 |
| 5.1.3 | Question au passage | 16 |
| 5.2 | Résolution de $UX = b$; U Triangulaire supérieure | 18 |
| 5.2.1 | préliminaires | 18 |
| 5.2.2 | Système triangulaire : cas général | 18 |
| 5.2.3 | Algorithme de résolution pour $UX = B$ | 19 |
| 5.3 | Résolution du système $AX = b$; $A \in GL_n(\mathbb{R})$ | 20 |
| 5.3.1 | Méthode de Gauss : Cas général | 20 |
| 5.3.2 | Méthode de Gauss avec pivot | 25 |
| 5.4 | La factorisation LU et $P^{-1}LU$ d'une matrice inversible A | 27 |
| 5.4.1 | La factorisation LU sans permutation de lignes | 27 |
| 5.4.2 | Algorithme et complexité : Décomposition LU | 29 |
| 5.4.3 | La factorisation LU avec une stratégie de pivot : factorisation $P^{-1}LU$ | 30 |
| 5.5 | Décomposition de cholesky | 33 |
| 5.5.1 | Existence théorique de la Décomposition de cholesky | 33 |
| 5.5.2 | Calcul pratique de la décomposition de Cholesky | 34 |
| 5.5.3 | Complexité de la décomposition de Cholesky | 35 |

Chapitre 1

Chapitre 2

Chapitre 3

Chapitre 4

système sous forme matricielle

$$V(x_0, \dots, x_n) \begin{pmatrix} a_0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{pmatrix} \quad (S_v)$$

ou $V(x_0, \dots, x_n)$ est la matrice de Vandermonde :

$$V(x_0, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdot & \cdot & \cdot & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdot & \cdot & \cdot & x_1^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot & \cdot \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdot & \cdot & \cdot & x_n^n \end{pmatrix}$$

Le système (S_v) est un système de Cramer si et seulement si $\det(V(x_0, \dots, x_n)) \neq 0$. On montre par récurrence que $\det(V(x_0, \dots, x_n)) = \prod_{i,j,0 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$.

Donc d'après ce qui précède, $V(x_0, \dots, x_n)$ est inversible si et seulement si les x_i sont deux à deux distincts. On a donc l'existence et l'unicité d'un tel polynôme si et seulement si les x_i sont deux à deux distincts.

5.1.2 Motivation

On considère un système (S) de n équations à n inconnues de la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,n}x_n = b_1, \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,n}x_n = b_2, \\ \dots \\ \dots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \dots + a_{n,n}x_n = b_n. \end{array} \right. \quad (S)$$

Les données sont les coefficients $a_{i,j}$ du système qui appartiennent à un corps K avec $K = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} ainsi que les coefficients du second membre b_1, \dots, b_n . Les inconnues sont x_1, \dots, x_n qui appartiennent à K .

Un système est dit *homogène* si son second membre est nul c'est-à-dire si tous les b_i sont nuls.

Le système (S) s'écrit sous forme matricielle

$$A X = b, \quad (S)$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & & & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot & \cdot \\ a_{n,1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{n,n} \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K}), X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n \text{ et } b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n.$$

Dans tout ce chapitre, on supposera que la matrice A est inversible.

Etude des solutions : (l_i : i ième ligne)

Exemple 5.1 Résoudre le système :

$$l_1 \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ l_2 \begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \end{cases} \end{cases} \quad (S)$$

1. Par substitution

$$(S) \Leftrightarrow \begin{matrix} l'_1 \\ l'_2 \end{matrix} \begin{cases} x_1 = x_2 \\ 2x_1 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} l''_1 \\ l''_2 \end{matrix} \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = x_1 = 1 \end{cases}$$

2. Par combinaison de lignes

$$(S) \Leftrightarrow \begin{matrix} l_1 \\ l'_2 = l_2 - l_1 \end{matrix} \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ 2x_2 = 2 - 0 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} l'_1 \\ l'_2 \end{matrix} \begin{cases} x_1 = x_2 = 1 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

3. Par Inversion de la matrice (a éviter pour des matrices de grandes taille)

$$(S) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} : AX = B$$

$$\det A = 2, A^{-1} = \frac{1}{\det A} {}^t \text{com}A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Si A^{-1} existe alors $X = A^{-1}B$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4. Par méthode de Cramer (La plus belle théoriquement)

Si $\det(A) \neq 0$ (A inversible), (S) admet une solution unique.

Expression des solutions par la règle de Cramer : $x_k = \frac{\det_k(A)}{\det(A)}$ avec :

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} m_{ij} = \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon_{\sigma} a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n),n},$$

où m_{ij} est le déterminant de la sous-matrice obtenue en supprimant de A la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne et

$$\det_k(A) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1,k-1} & \color{blue}{b_1} & a_{1,k+1} & a_{1,n} \\ & & & & & \circlearrowleft_{a_{1,k}} & & \\ a_{2,1} & & & & \cdot & \color{blue}{b_2} & \cdot & \\ & & & & \cdot & \circlearrowleft_{a_{2,k}} & \cdot & \\ & & & & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & & \cdot & \cdot & \cdot & \\ a_{n,1} & & & & a_{n,k-1} & \color{blue}{b_n} & a_{n,k+1} & a_{n,n} \\ & & & & & \circlearrowleft_{a_{n,k}} & & \end{vmatrix}$$

Exemple : $\begin{cases} x + y = 2 \\ 5x + y = 3 \end{cases}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ donc $\det(A) = -4 \neq 0$ et $x = \frac{1}{4}$ et $y = \frac{7}{4}$

REMARQUE 5.1 Si $\det(A) = 0$ (A non inversible) les solutions sont impossibles ou indéterminés

Exemple 5.2 $\begin{cases} x + 3y = 1 \\ 4x + 12y = -5 \end{cases}$, $\det(A) = 0$. le système est impossible.

5.1.3 Question au passage

Pourquoi le problème de la résolution d'un système linéaire se pose, alors que les formules de Cramer nous donnent la solution ?

Réponse :

La première réflexion va jusqu'au coût des calculs !

Pour comprendre, essayons de compter le nombre d'opérations nécessaires pour calculer la solution en utilisant ces formules de Cramer.

1. Nous devons calculer $n + 1$ déterminants de taille n . On sait que le déterminant de A est donné par la formule

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon_{\sigma} a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n),n}$$

où S_n est l'ensemble des permutations de $\{1, \dots, n\}$ et ϵ_{σ} est la signature de la permutation σ ($\epsilon_{\sigma} \in \{-1, 1\}$).

L'ensemble S_n contient $n!$ éléments donc le calcul de $\det(A)$ se ramène à $n! - 1$ **additions** et $n!(n - 1)$ **multiplications** soit au total $n! - 1 + n!(n - 1) = nn! - 1$ opérations. Comme nous avons $n + 1$ déterminants à calculer. De plus on a besoin de n divisions, par suite le nombre d'opérations nécessaires pour résoudre le système à l'aide des formules de Cramer est de $(n + 1)(nn! - 1) + n$ opérations qui est équivalent lorsque n tend vers l'infini à $n(n + 1)!$.

Pour poursuivre l'explication on a besoin de la définition suivante :

DÉFINITION 5.1 (*FLOPS*)

Le FLOPS est le nombre d'opérations en virgule flottante (additions ou multiplications des nombres réels) par seconde (en anglais : floating-point operations per second ou FLOPS) est une unité de mesure de la performance d'un système informatique.

Essayons d'évaluer $n(n + 1)!$. Pour ceci on peut utiliser la formule de Stirling qui est très précise pour évaluer la factorielle :

$$n! \sim n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} \sqrt{2\pi}$$

Lorsque $n = 100$

$$\begin{aligned} 100.101! &= 100.101.100! \simeq 100.101.100^{100,5} \cdot e^{-100} \cdot \sqrt{2\pi} \\ &\simeq 100.101.100^{100,5} \cdot 10^{-43,43} \cdot \sqrt{2\pi} \\ &\simeq 10^{205-44} \cdot 10^{0,57} \cdot \sqrt{2\pi} \\ &\simeq 9,4 \cdot 10^{161} \end{aligned}$$

Par exemple, avec ordinateur fonctionnant à 100 megaflops (1 megaFLOPS=10⁶flops), il faudrait environ $3 \cdot 10^{146}$ années pour résoudre notre système! c'est TROP!!

On en déduit donc qu'il est impossible d'utiliser les formules de Cramer pour des systèmes de grande taille. En pratique, on utilise les méthodes directes pour des systèmes de dimension peu élevée ($n \leq 100$). Pour de très grands systèmes qui peuvent par exemple apparaître en économie ou pour l'approximation d'équations aux dérivées partielles (voir Chapitre 6), on préfère les méthodes itératives.

5.2 Résolution de $UX = b$; U Triangulaire supérieure

5.2.1 préliminaires

On note l_i : i ieme ligne.

Soient $A, B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ deux matrices triangulaires supérieures. On a alors les résultats suivants :

1. $A.B$ est triangulaire supérieure ;
2. Si A et B sont à diagonale unité (i.e., n'ont que des 1 sur la diagonale), alors $A.B$ est à diagonale unité ;
3. Si A est inversible, alors A^{-1} est aussi triangulaire supérieure ;
4. Si A est inversible et à diagonale unité, alors A^{-1} est aussi à diagonale unité.

En principe il existe deux grandes classes de méthodes pour résoudre ce type de systèmes :

1. les méthodes *directes* qui déterminent la solution exacte après un nombre fini d'opérations arithmétiques (\pm, \times, \div),
2. les méthodes *itératives* qui consistent à générer une suite récurrente qui converge vers la solution approché du système.

Dans ce chapitre nous nous intéressons aux méthodes directes. Les méthodes itératives seront abordées extérieurement.

5.2.2 Système triangulaire : cas général

On considère le système T_S :

$$(T_S) : \begin{cases} u_{11}x_1 + u_{12}x_2 + \cdots + u_{1n}x_n & = b_1 \\ 0x_1 + u_{22}x_2 + \cdots + u_{2n}x_n & = b_2 \\ & : & : & : \\ & : & : & : \\ 0x_1 + \cdots + 0x_{n-1} + u_{nn}x_n & = b_n \end{cases}$$

On note U la matrice du système T_S , puisque U est supposée inversible, aucun des $u_{k,k}$ n'est nul et on peut résoudre ce système en utilisant l'*algorithme de substitution retrograde (ou substitution arrière)* suivant :

Comme $u_{kk} \neq 0$; $k = 1, \dots, n$; Alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_n = \frac{1}{u_{n,n}} b_n \\ x_{n-1} = \frac{1}{u_{n-1,n-1}} (b_{n-1} - u_{n-1,n}x_n) \\ \vdots \\ \vdots \\ x_1 = \frac{1}{u_{11}} (b_1 - \sum_{j=2}^n u_{1j}x_j) \end{array} \right.$$

Généralement : $x_i = \frac{1}{u_{ii}} (b_i - \sum_{j=i+1}^n u_{ij}x_j)$ / $i = 1, \dots, n - 1$

5.2.3 Algorithme de résolution pour $UX = B$

Dans le cas des matrices triangulaires supérieures, l'algorithme est le suivant.

Données : $U = (U[i, j])_{1 \leq i, j \leq n}$, $b = (b[i])_{1 \leq i \leq n}$, n le nb de lignes, n le nb de colonnes

début

```

x[n] ← b[n] / U[n,n]

  Pour i de n - 1 à 1 par pas de -1, faire :
    x[i] = (b[i] - ∑_{j=i+1}^n U[i,j] * x[j]) / U[i,i] ;

  [Retourner x = (x[i])_{1 ≤ i ≤ n}

fin
    
```

REMARQUE 5.2 1. Si L est une matrice triangulaire inférieure, on obtient l'algorithme de substitution progressive (ou substitution avant).

2. le nombre d'opérations nécessaires :

Le calcul de x_n nécessite 1 opération (division), calculer x_{n-1} nécessite 3 opérations (une multiplication, une soustraction et une division), et calculer x_i nécessite $2(n - i) + 1$ opérations ($n - i$ multiplications, $(n - i - 1)$ additions, 1 soustraction et 1 division). Au total, le nombre d'opérations est donc

$$\begin{aligned} \text{Comp}_T &= \sum_{i=1}^{n-1} (2(n - i) + 1) + 1 \\ &= 2 \sum_{i=1}^{n-1} n - 2 \sum_{i=1}^{n-1} i + \sum_{i=1}^{n-1} 1 + 1 = 2n(n - 1) + 2 \frac{n(n-1)}{2} + (n - 1) + 1 \\ &= 2n(n - 1) - n(n - 1) + (n - 1) + 1 = (n - 1)n + n - 1 + 1 = n^2. \end{aligned}$$

Qui est très loin de $n(n + 1)!$.

5.3 Résolution du système $AX = b$; $A \in GL_n(\mathbb{R})$

Dans ce paragraphe, nous allons considérer les deux méthodes directes suivantes pour la résolution de $(S) : AX = b$:

1. Méthode de Gauss (et variantes) : le principe est de réduire le système à $UX = b'$ avec $U := M.A$ est triangulaire supérieure sans calculer explicitement la matrice M . On se ramène donc à la résolution d'un système triangulaire supérieur. Cette méthode donne naissance à la factorisation $A = LU$ de la matrice A avec L triangulaire inférieure (Lower Matrix) et U triangulaire supérieure (Upper Matrix).

Étant donnée une telle factorisation $A = LU$, on peut résoudre le système $AX = b$ en résolvant successivement les deux systèmes triangulaires $LY = b$ puis $UX = Y$.

2. Méthode de Cholesky associée à la factorisation de Cholesky $A = T^tT$ avec T triangulaire supérieure. Cette méthode est valable pour une matrice A symétrique et définie positive. On résout alors $Ax = b$ en résolvant successivement les systèmes triangulaires $T^ty = b$ puis $Tx = y$.

5.3.1 Méthode de Gauss : Cas général

1. Description de la méthode

On considère le système linéaire $(S) : AX = b$ en supposant toujours que A est inversible et on pose

$$(S) = (S^{(0)}) \begin{cases} a_{11}^{(0)}x_1 + a_{12}^{(0)}x_2 + a_{13}^{(0)}x_3 + \dots + a_{1n}^{(0)}x_n & = b_1^{(0)} \\ a_{21}^{(0)}x_1 + a_{22}^{(0)}x_2 + a_{23}^{(0)}x_3 + \dots + a_{2n}^{(0)}x_n & = b_2^{(0)} \\ \vdots & \vdots \\ a_{n1}^{(0)}x_1 + a_{n2}^{(0)}x_2 + a_{n3}^{(0)}x_3 + \dots + a_{nn}^{(0)}x_n & = b_n^{(0)} \end{cases}$$

Le système $(S^{(0)})$ s'écrit alors $A^{(0)}x = b^{(0)}$ que l'on note $b^{(0)} = b$ et $A^{(0)} = A = (a_{i,j}^{(0)})_{1 \leq i,j \leq n}$

- (a) **Étape 1** : Puisque A est inversible, quitte à échanger la première ligne de $A^{(0)}$ avec une autre, on peut supposer que $a_{1,1}^{(0)} \neq 0$.

Le nombre $a_{1,1}^{(0)}$ est le premier *pivot* de l'élimination de Gauss. Pour $i = 2, \dots, n$, on multiplie la première équation de $(S^{(0)})$ par $G_{i,1} = \frac{a_{i,1}^{(0)}}{a_{1,1}^{(0)}}$ et on retranche l'équation obtenue à la i ème équation de $(S^{(0)})$. La i ème ligne l_i de $(S^{(0)})$ devient donc $l_i - G_{i,1}l_1$. On obtient alors un nouveau système $(S^{(1)}) : A^{(1)}x = b^{(1)}$ avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{1,j}^{(1)} = a_{1,j}^{(0)}, j = 1, \dots, n, \\ a_{i,1}^{(1)} = 0, i = 2, \dots, n, \\ a_{i,j}^{(1)} = a_{i,j}^{(0)} - G_{i,1}a_{1,j}^{(0)}, i, j = 2, \dots, n, \\ b_1^{(1)} = b_1^{(0)}, \\ b_i^{(1)} = b_i^{(0)} - G_{i,1}b_1^{(0)}, i = 2, \dots, n. \end{array} \right.$$

La matrice $A^{(1)}$ et le vecteur $b^{(1)}$ sont donc de la forme :

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} = a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(1)} = a_{12}^{(0)} & \dots & a_{1n}^{(1)} = a_{1n}^{(0)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{n2}^{(1)} & \dots & a_{nn}^{(1)} \end{pmatrix}, b^{(1)} = \begin{pmatrix} b_1^{(1)} = b_1 \\ \dots \\ \dots \\ b_n^{(1)} \end{pmatrix}$$

- (b) **Étape k** : Le procédé suppose que tous les $a_{kk}^{(k-1)} \neq 0$. Si à une étape k on a $a_{kk}^{(k-1)} = 0$ et s'il y'a au moins un des $a_{ik}^{(k-1)} \neq 0$ ($i = k + 1, \dots, n$) on permute les lignes k et i et on continue, sinon ca voudrait dire que la matrice A n'est pas inversible.

On a ramené le système à $(S^{(k-1)}) : A^{(k-1)}x = b^{(k-1)}$ avec

$$A^{(k-1)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(k-1)} = a_{11}^{(0)} & \dots & a_{1k}^{(k-1)} = a_{1k}^{(0)} & a_{1k+1}^{(k-1)} = a_{1k+1}^{(0)} & \dots & a_{1n}^{(k-1)} = a_{1n}^{(0)} \\ 0 & \dots & : & : & : & a_{2n}^{(k-1)} = a_{2n}^{(1)} \\ : & 0 & a_{kk}^{(k-1)} & & & \\ : & : & a_{k+1k}^{(k-1)} & a_{k+1,k+1}^{(k-1)} & : & : \\ 0 & : & : & : & \dots & . \\ 0 & 0 & a_{nk}^{(k-1)} & a_{n,k+1}^{(k-1)} & \dots & a_{nn}^{(k-1)} \end{pmatrix}$$

$$\text{et } b^{(k-1)} = \begin{pmatrix} b_1^{(k-1)} = b_1 \\ \dots \\ \dots \\ b_n^{(k-1)} \end{pmatrix}$$

On peut alors se ramener au cas $a_{k,k}^{(k-1)} \neq 0$ et $a_{k,k}^{(k-1)}$ est le $k^{\text{ième}}$ pivot de l'élimination de Gauss. Par le même principe qu'à l'étape 1 et en utilisant $G_{i,k} = \frac{a_{i,k}^{(k-1)}}{a_{k,k}^{(k-1)}}$ pour $i > k$, on obtient alors $(S^{(k)}) : A^{(k)}x = b^{(k)}$ avec

$$(S^{(k)}) : \left\{ \begin{array}{cccccccc} a_{11}^{(0)}x_1 & +a_{12}^{(0)}x_2 & \dots & & & \dots & +a_{1n}^{(0)}x_n & = b_1^{(0)} \\ 0 & +a_{22}^{(1)}x_2 & \dots & & & \dots & +a_{2n}^{(1)}x_n & = b_2^{(1)} \\ 0 & +0 & : & : & : & : & : & : \\ : & : & & +a_{kk}^{(k-1)}x_k & +a_{k,k+1}^{(k-1)}x_{k+1} & \dots & +a_{kn}^{(k-1)}x_n & = b_k^{(k-1)} \\ : & : & \dots & +0 & +a_{k+1,k+1}^{(k)}x_{k+1} & \dots & +a_{k+1,n}^{(k)}x_n & = b_{k+1}^{(k)} \\ : & : & : & : & : & : & : & : \\ 0 & +0 & \dots & +0 & +a_{n,k+1}^{(k)}x_{k+1} & \dots & +a_{n,n}^{(k)}x_n & = b_n^{(k)} \end{array} \right.$$

2. **Étape n-1** : Le système $(S^{(n-1)}) : A^{(n-1)}x = b^{(n-1)}$ obtenu est triangulaire supérieure avec

$$(S^{(n-1)}) : \left\{ \begin{array}{cccccccc} a_{11}^{(0)}x_1 & +a_{12}^{(0)}x_2 & \dots & & & \dots & +a_{1n}^{(0)}x_n & = b_1^{(0)} \\ 0 & +a_{22}^{(1)}x_2 & \dots & & & \dots & +a_{2n}^{(1)}x_n & = b_2^{(1)} \\ 0 & +0 & : & : & : & : & : & : \\ : & : & & +a_{kk}^{(k-1)}x_k & +a_{k,k+1}^{(k-1)}x_{k+1} & \dots & +a_{kn}^{(k-1)}x_n & = b_k^{(k-1)} \\ : & : & \dots & +0 & +a_{k+1,k+1}^{(k)}x_{k+1} & \dots & +a_{k+1,n}^{(k)}x_n & = b_{k+1}^{(k)} \\ : & : & : & : & +0 & : & : & : \\ 0 & +0 & \dots & +0 & : & +0 & +a_{n,n}^{(n-1)}x_n & = b_n^{(n-1)} \end{array} \right.$$

et peut donc être résolu par l'algorithme de substitution rétrograde de la sous-section précédente.

3. Algorithme de calcul

Données : $A = (A[i, j])$, n le nb de lignes, n le nb de colonnes

début

```

    pour k = 1...n faire
    p ← A[k, k]
    pour i = k + 1...n faire
    q ← A[i, k]
    A[i, k] ← 0
    pour j = k + 1...n faire
    A[i, j] = A[i, j] - A[k, j]. $\frac{q}{p}$ 
    fin

```

A l'aide du logiciel Maple \rightsquigarrow :

```

> restart ; with(linalg) ;
> M := matrix([[3, -1, 0, 5], [-1, 2, 4, 1], [12, 5, -3, 2]]);
> G := gausselim(M) ;
> N := gaussjord(M) ;
> A := submatrix(G, 1 .. 3, 1 .. 3) ;
> A1 := submatrix(N, 1 .. 3, 1 .. 3) ;
> b := col(G, 4) ;
> b1 := col(N, 4) ;
> linsolve(A, b) ;
> linsolve(A1, b1) ;

```

Exemple 5.3 Nous allons décrire maintenant sur un exemple le principe de la méthode de Gauss, dans une version un peu simplifiée. On part du système

$$(E) \begin{cases} 2x + y + z = 5 & (l_1) \\ x - 2y + z = -5 & (l_2) \\ y + 4z = 3 & (l_3) \end{cases}$$

Avec les notation matricielle

On bâtit une matrice dans laquelle, on place le second membre à droite de la matrice

naturellement associée au système :

$$(A | b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & -2 & 1 & -5 \\ 0 & -1 & 4 & 3 \end{array} \right)$$

Les opérations que nous avons effectuées s'écrivent successivement :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & -2 & 1 & -5 \\ 0 & -1 & 4 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow[l_2 \leftarrow l_2 - l_1]{l_1 \leftarrow \frac{1}{2}l_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{15}{2} \\ 0 & -1 & 4 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow[l_3 \leftarrow l_3 + l_2]{l_2 \leftarrow \frac{-2}{5}l_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} & 3 \\ 0 & 0 & \frac{21}{5} & 0 \end{array} \right)$$

Donc par la remontée $z = 0, y = 3$ et $x = \frac{5}{2} - \frac{3}{2} = 1$.

4. Complexité au calcul de la solution de $AX = b$.

Le nombre d'opérations pour l'élimination de Gauss avec prise en compte du second membre s'écrit donc

$$\begin{aligned} \text{Comp}_G &= \overbrace{\sum_{i=1}^{n-1}}^{\text{le choix du pivot}} \overbrace{\sum_{k=i+1}^n}^{\text{Effet sur les lignes } \geq i+1} \overbrace{[1\text{div} + \sum_{j=i}^n (1\text{add} + 1\text{mult})]}^{\text{Effet sur la } i\text{ème colonne}} \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=i+1}^n [1\text{div} + (n-i+1)\text{add} + (n-i+1)\text{mult}] \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} [(n-i)\text{div} + (n-i)(n-i+1)\text{add} + (n-i)(n-i+1)\text{mult}] \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} (n-i)\text{div} + \sum_{i=1}^{n-1} (n-i)(n-i+1)\text{add} + \sum_{i=1}^{n-1} (n-i)(n-i+1)\text{mult} \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} (n-i)\text{div} + (\sum_{i=1}^{n-1} (n-i) + \sum_{i=1}^{n-1} (n-i)^2)\text{add} + (\sum_{i=1}^{n-1} (n-i) + \sum_{i=1}^{n-1} (n-i)^2)\text{mult} \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} k\text{div} + (\sum_{k=1}^{n-1} k + \sum_{k=1}^{n-1} k^2)\text{add} + (\sum_{k=1}^{n-1} k + \sum_{k=1}^{n-1} k^2)\text{mult} \\ &= \frac{(n-1)n}{2}\text{div} + \frac{(n-1)n}{2}\text{add} + \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}\text{add} + \frac{(n-1)n}{2}\text{mult} + \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}\text{mult} \\ &= 2\frac{n(n-1)(2n+5)}{6} + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{2}{3}n^3 + \frac{3}{2}n^2 - \frac{7}{6}n. \end{aligned}$$

Il vient que le nombre d'opérations de la partie élimination de l'algorithme de Gauss est de l'ordre n^3 : $\text{Comp}_G = O(n^3)$.

Or dans 2 on a montré que l'algorithme de remontée est de l'ordre de n^2 , $\text{Comp}_T = O(n^2)$. Au total l'algorithme d'élimination de Gauss avec résolution du système linéaire $Ax = b$ est de l'ordre de n^3 , i.e. $O(n^3)$ où la matrice carrée A est d'ordre n .

Exemple 5.4

| | | | |
|-------------------------------|-----|-------|--|
| <i>Dimension</i> | 5 | 8 | 50 |
| <i>Nb. Ope. Gauss S.Pivot</i> | 140 | 492 | 89525 |
| <i>Nb. Ope. Cramer</i> | 120 | 40320 | 30414093201713378043612608166064768 844377641568960512 10 ¹² |

5.3.2 Méthode de Gauss avec pivot

Soit à résoudre le système

$$(S) \begin{cases} \alpha x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 2 \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

On suppose de plus $\alpha \neq 1$ de sorte que A est inversible et que α est proche de 0.

1. **solution théorique** : On a $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\alpha-1} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\alpha-1} \begin{pmatrix} -1 \\ -1+2\alpha \end{pmatrix}$.

Donc **La solution théorique** est $x_1 = -1/(-1 + \alpha)$ et $x_2 = \frac{-1+2\alpha}{-1+\alpha}$.

Prenons par exemple $\alpha = 10^{-5}$ et cherchons les solutions avec des valeurs approches à 10^{-4} près.

On aura :

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-1}{-1+\alpha} = \frac{-1}{-0.99999} = 1.0000100001 \text{ à } 10^{-4} \text{ près } 1, \\ x_2 = \frac{-1+2\alpha}{-1+\alpha} = \frac{-0.99998}{-0.99999} = 0.999989999 \text{ à } 10^{-4} \text{ près } 0.9999 \end{cases}$$

2. **Résolution du système par la méthode de Gauss** : On trouve

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & 1 - \frac{1}{\alpha} \end{pmatrix}, \quad b^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 - \frac{1}{\alpha} \end{pmatrix} \text{ avec } G_{21} = \frac{a_{21}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} = \frac{1}{\alpha}$$

$$(S_1) \begin{cases} \alpha x_1 + x_2 = 1 \\ (1 - \frac{1}{\alpha})x_2 = 2 - \frac{1}{\alpha} \end{cases}$$

Avec le choix de $\alpha = 10^{-5}$ et appliquons la méthode de Gauss avec 4 digits significatifs

Donc :

$$\begin{cases} x_2 = \frac{2 - \frac{1}{\alpha}}{1 - \frac{1}{\alpha}} = \frac{2\alpha - 1}{\alpha - 1} = \frac{-0.99998}{-0.99999} = 0.999989999 \text{ à } 10^{-4} \text{ près } 0.9999, \\ x_1 = \frac{1 - 0.999989999}{\alpha} = \frac{0.00001000001}{\alpha} \text{ à } 10^{-4} \text{ près } \frac{0.0000}{\alpha} = 0 \neq 1 \end{cases}$$

c/c La méthode de Gauss donne des résultats différents Si on applique la méthode de Gauss sans pivot. (c'est une catastrophe numérique !!)

3. **Stratégie du pivot partiel** : elle consiste à mettre en première ligne celle dont le coefficient de x_1 est le plus grand en module alors on permute les lignes pour obtenir le système

$$(S_1) \begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ \alpha x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$$

Pour lequel $G_{21} = \frac{\alpha}{1} = \alpha$ et qui conduit à

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 - \alpha \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 - 2\alpha \end{pmatrix},$$

Avec le même choix de $\alpha = 10^{-5}$, on obtient alors

$$\begin{cases} x_2 = \frac{1 - 2\alpha}{1 - \alpha} = \frac{0.99998}{0.99999} = 0.999989999 \text{ à } 10^{-4} \text{ près } 0.9999 \\ x_1 = 2 - x_2 = 2 - \frac{1 - 2\alpha}{1 - \alpha} = \frac{1}{1 - \alpha} = \frac{1}{0.99999} = 1.0000100001 \text{ à } 10^{-4} \text{ près } 1. \end{cases}$$

La méthode de Gauss avec pivot partiel consiste à choisir à l'étape k : $a_{kk}^{(k-1)}$ tel que

$$|a_{kk}^{(k-1)}| = \max_{k \leq i \leq n} |a_{ik}^{(k-1)}|$$

Par exemple, pour le système (S) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 3x_3 = \frac{1}{2}, \\ x_1 + 12x_3 = -1, \\ 7x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 5. \end{cases}$, à l'étape 1, on va per-

muter les lignes 1 et 3 et considérer

$$(S') : \begin{cases} 7x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 5, \\ x_1 + 12x_3 = -1, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

4. **Élimination de Gauss à pivot total** : À l'étape k , on échange à la fois les lignes k et i ($k \leq i \leq n$) et les colonnes k et j ($k \leq j \leq n$) de telle sorte que :

$$|a_{k,k}^{(k)}| = \max\{|a_{i,j}^{(k)}|, i \geq k, j \geq k\}.$$

Attention! Si on fait des échanges de colonnes cela modifie l'ordre des composantes du vecteur solution x donc il faut penser à rétablir le bon ordre des composantes à la fin.

Par exemple, pour le système (S) précédent, à l'étape 1, on va permuter les colonnes 1 et 2 et considérer

$$(S') : \begin{cases} 12 x_3 + x_1 = -1, \\ 3 x_3 + 3 x_1 - x_2 = \frac{1}{2}, \\ 5 x_3 + 7 x_1 + 2x_2 = 5. \end{cases} \text{ et } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \text{ de vient } X' = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

5.4 La factorisation LU et $P^{-1}LU$ d'une matrice inversible A

5.4.1 La factorisation LU sans permutation de lignes

DÉFINITION 5.2

1. Soit $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$. On appelle factorisation LU de A une factorisation $A = LU$ avec $L \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ triangulaire inférieure et $U \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ triangulaire supérieure.
2. Soit $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$. Les mineurs fondamentaux $D_k, k = 1, \dots, n$ de A sont les déterminants des sous-matrices de A formées par les k premières lignes et les k premières colonnes de A : $D_k = \det((a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq k})$ pour $k = 1, \dots, n$.

PROPOSITION 5.1 Avec les notations de la sous-section précédente de l'élimination de Gauss, à l'étape k on a $A^{(k)} = G_k A^{(k-1)}$ où

$$G_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & & 0 \\ 0 & \ddots & & & : \\ : & \dots & \ddots & & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 1 & \\ & & & -G_{k+1,k} & \ddots & \dots & : \\ : & \dots & & \dots & \ddots & & 0 \\ 0 & & & -G_{k,k} & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{colonne } k \\ \downarrow \\ \leftarrow \text{ligne } k+1 \end{matrix}$$

On note $G_{i,k} = \frac{a_{i,k}^{(k-1)}}{a_{k,k}^{(k-1)}}$, $i = k+1, \dots, n$. On a de plus $b^{(k)} = G_k b^{(k-1)}$.

En effet : Il suffit d'effectuer le produit $G_k A^{(k-1)}$ et de vérifier que l'on retrouve $A^{(k)}$.

THÉOREME 5.1

Soit $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée inversible. Si l'élimination de Gauss s'effectue sans permutation de lignes, alors il existe $L \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ triangulaire inférieure inversible et $U \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ triangulaire supérieure inversible telles que $A = LU$;

Preuve. D'après les notations précédentes, on a

$$A^{(n-1)} = G_{n-1}G_{n-2} \cdots G_1 A$$

La matrice $G_{n-1}G_{n-2} \cdots G_1$ étant inversible, on peut donc écrire

$$A = (G_{n-1}G_{n-2} \cdots G_1)^{-1} A^{(n-1)}$$

Les matrices G_k étant triangulaires inférieures, alors $(G_{n-1}G_{n-2} \cdots G_1)^{-1}$ est aussi triangulaire inférieure. De plus, par construction $A^{(n-1)}$ est triangulaire supérieure d'où le résultat en posant

$$L = (G_{n-1}G_{n-2} \cdots G_1)^{-1} \text{ et } U = A^{(n-1)}.$$

On peut même appliquer cette remarque pour vérifier l'existence de L et de U :

REMARQUE 5.3 Si Tous les mineurs fondamentaux de A sont non nuls, alors il existe $L \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ triangulaire inférieure inversible et $U \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ triangulaire supérieure inversible telles que $A = LU$;

La proposition suivante nous permet d'expliciter la matrice L de la factorisation LU de A obtenue à partir de l'élimination de Gauss.

PROPOSITION 5.2 Avec les notations précédentes, on a

$$(G_{n-1}G_{n-2} \cdots G_1)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ G_{2,1} & 1 & & & \vdots \\ G_{3,1} & G_{3,2} & 1 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & 0 \\ G_{n,1} & G_{n,2} & \dots & G_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix}$$

Preuve. un simple calcul du produit $G_{n-1}.L$ permet de conclure.

Exemple 5.5 On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & 6 & 1 \\ -2 & 11 & 8 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & 6 & 1 \\ -2 & 11 & 8 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_3 = L_3 + L_1 \\ \rightarrow \\ L_2 = L_2 - 2L_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 12 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} L_3 = L_3 - 3L_2 \\ \rightarrow \end{matrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Donc $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{4}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{2}{2} & \frac{12}{4} & 1 \end{pmatrix}$ et $U = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

PROPOSITION 5.3 Soit $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée inversible admettant une factorisation LU . Alors il existe une unique factorisation LU de A avec L à diagonale unité.

Preuve. Supposons que A admet une factorisation LU , alors l'existence d'une factorisation LU avec L à diagonale unité est claire d'après le théorème 5.4.1. Supposons maintenant que A admette deux factorisations $LU : A = L_1U_1$ et $A = L_2U_2$ avec L_1 et L_2 à diagonale unité. L'égalité $L_1U_1 = L_2U_2$ implique $U_1U_2^{-1} = L_1^{-1}L_2$. D'après le rappel, $U_1U_2^{-1}$ est triangulaire supérieure et $L_1^{-1}L_2$ est triangulaire inférieure à diagonale unité. La seule possibilité pour que ces deux matrices soient égales est donc

$$U_1U_2^{-1} = L_1^{-1}L_2 = I_n$$

ce qui implique $L_1 = L_2$ et $U_1 = U_2$.

Lorsque A admet une factorisation LU , la résolution du système d'équations linéaires $(S) : Ax = b$ se ramène à la résolution de deux systèmes linéaires triangulaires. En effet :

$$Ax = b \Leftrightarrow LUx = b \Leftrightarrow \begin{cases} Ly = b, \\ Ux = y. \end{cases}$$

En pratique, on résout donc d'abord $Ly = b$ puis connaissant y on résout $Ux = y$.

5.4.2 Algorithme et complexité : Décomposition LU

– Algorithme :

Introduire une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ à décomposer.

```

L = I_n
  for j from 1 to n - 1 do
    L_hat = I_n
      for i from j+1 to n do
        L_hat[i, j] = -a[i, j] / a[j, j]
    A = L_hat.A
    L = L.L_hat^-1
  U = A
  return L et U
    
```

– **Complexité de l’algorithme :**

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice carré inversible. Résoudre un système linéaire $(S) : AX = b$ via l’élimination de Gauss nécessite un nombre d’opérations à virgule flottante équivalent à $\frac{2n^3}{3}$ lorsque n tend vers l’infini. Ce coût asymptotique est aussi celui du calcul de la factorisation LU de A .

5.4.3 La factorisation LU avec une stratégie de pivot : factorisation $P^{-1}LU$

DÉFINITION 5.3

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. On appelle factorisation $P^{-1}LU$ de A une factorisation $PA = LU$ avec $L \in M_n(\mathbb{R})$ triangulaire inférieure, $U \in M_n(\mathbb{R})$ triangulaire supérieure et $P \in GL_n(\mathbb{R})$.

DÉFINITION 5.4 (permutation)

On appelle matrice de permutation associée à une permutation $\sigma \in S_n$, la matrice $\mathcal{P}_\sigma = (\delta_{i\sigma(j)})_{1 \leq i, j \leq n}$ où $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$ et $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$.

Exemple 5.6 Si l’on considère la permutation, $\sigma : \begin{pmatrix} 1, 2, 3, 4, 5 \\ 3, 2, 5, 1, 4 \end{pmatrix}$, on obtient la "matrice de permu-

tation élémentaire'

$$\mathcal{P}_\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Principe :

1. Multiplier une matrice A à gauche (resp. à droite) par une matrice de permutation revient alors à permuter les lignes (resp. les colonnes) de la matrice.
2. En multipliant une matrice à gauche par la matrice \mathcal{P}_σ 5.6, la troisième ligne devient la première, la seconde ligne reste inchangée, la cinquième ligne devient la troisième. . . .
3. Les matrices de permutation sont orthogonales c'est-à-dire que $\forall \sigma \in S_n, \mathcal{P}_\sigma^{-1} = \mathcal{P}_\sigma^t$.

Lorsque la factorisation LU n'existe pas, on peut tout de même utiliser le théorème suivant :

THÉOREME 5.2

Soit $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée inversible. Il existe une matrice de permutation \mathcal{P} telle que $\mathcal{P}A$ admette une factorisation LU .

Preuve. 1. L'existence de la matrice P et des matrices L, U peut s'effectuer en s'inspirant de l'algorithme LU avec pivot partiel.

Posons $A^{(0)} = A$. À chaque étape i de l'algorithme peut s'écrire comme $A^{(i)} = G_i P_i A^{(i-1)}$, où P_i est la matrice de permutation qui permet le choix du pivot partiel, et G_i est une matrice d'élimination qui effectue les combinaisons linéaires de lignes permettant de mettre à zéro tous les coefficients de la colonne i situés en dessous de la ligne i . Pour simplifier, raisonnons sur une matrice 4×4 (le raisonnement est le même pour une matrice $n \times n$. On a donc en appliquant l'algorithme de Gauss :

$$G_3 P_3 G_2 P_2 G_1 P_1 A = U$$

Les matrices P_{i+1} et G_i ne permutent en général pas. Prenons par exemple G_2 , qui est de la forme

$$G_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & b & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si P_3 est la matrice qui échange les lignes 3 et 4, alors

$$P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } P_3 G_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 1 \\ 0 & a & 1 & 0 \end{pmatrix}, G_2 P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 1 \\ 0 & b & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Mais par contre, comme la multiplication à gauche par P_{i+1} permute les lignes $i + 1$ et $i + k$, pour un certain $k \geq 1$, et que la multiplication à droite permute les colonnes $i + 1$ et $i + k$, la matrice $\widehat{G}_i = P_{i+1} G_i P_{i+1}^t$ est encore une matrice triangulaire inférieure avec la même structure que G_i : on a juste échangé les coefficients extradiagonaux des lignes $i + 1$ et $i + k$. On a donc

$$P_{i+1} G_i = \overline{G}_i P_{i+1}.$$

Dans l'exemple précédent, on effectue le calcul :

$$P_{i+1} G_i P_{i+1}^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & b & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 & 1 \end{pmatrix} = \overline{G}_i$$

qui est une matrice triangulaire inférieure de coefficients tous égaux à 1, et comme $P_3 P_3^t = I_4$, on a donc :

$$P_3 G_2 = \overline{G}_2 P_3.$$

Pour revenir à notre exemple $n = 4$, on peut donc écrire :

$$G_3 \overline{G}_2 P_3 \overline{G}_1 P_2 P_1 A = U$$

Mais par le même raisonnement que précédemment, on a $P_3 \overline{G}_1 = \overline{\overline{G}}_1 P_3$ où $\overline{\overline{G}}_1$ est encore une matrice triangulaire inférieure avec des 1 sur la diagonale. On en déduit que

$$G_3 \overline{G}_2 \overline{\overline{G}}_1 P_3 P_2 P_1 A = U, \text{ soit encore } PA = LU$$

où $P = P_3 P_2 P_1$ bien une matrice de permutation, et $L = (G_3 \overline{G}_2 \overline{\overline{G}}_1)^{-1}$ est une matrice triangulaire inférieure avec des 1 sur la diagonale.

Le raisonnement que nous venons de faire pour $n = 3$ se généralise facilement à n quelconque. Dans ce cas, l'échelonnement de la matrice s'écrit sous la forme $G_{n-1} P_{n-1} \dots G_2 P_2 G_1 P_1 A = U$

$$U = G_{n-1} P_{n-1} \dots G_2 P_2 G_1 P_1 A = U,$$

et se transforme grâce à

$$U = G_{n-1} \overline{\overline{\overline{G}}_{n-2}} \dots \overline{\overline{\overline{G}}_1} \cdot P_{n-1} \dots P_2 P_1 A,$$

où les matrices \overline{G}_i sont des matrices triangulaires inférieures de coefficients diagonaux tous égaux à 1.

2. Pour montrer l'unicité du couple (L, U) à P donnée, supposons qu'il existe une matrice P et des matrices L_1, L_2 , triangulaires inférieures et U_1, U_2 , triangulaires supérieures, telles que

$$PA = L_1U_1 = L_2U_2$$

Dans ce cas, on a donc $L_2^{-1}L_1 = U_2U_1^{-1}$. Or la matrice $L_2^{-1}L_1$ est une matrice triangulaire inférieure dont les coefficients diagonaux sont tout égaux à 1, et la matrice $U_2U_1^{-1}$ est une matrice triangulaire supérieure. On en déduit que $L_2^{-1}L_1 = U_2U_1^{-1} = I_n$, et donc que $L_1 = L_2$ et $U_1 = U_2$.

Bref : Si P_1, \dots, P_{n-1} sont les matrices de permutations utilisées, alors il suffit de poser :

$$P = P_{n-1}P_{n-2} \dots P_1$$

$$\begin{aligned} PA &= P(G_{n-1}P_{n-1}G_{n-2}P_{n-2} \dots G_1P_1)^{-1}U, \text{ avec :} \\ L &= P(G_{n-1}P_{n-1}G_{n-2}P_{n-2} \dots G_1P_1)^{-1} \end{aligned}$$

Dans ce cas, on a :

$$AX = b \Leftrightarrow \mathcal{P}AX = \mathcal{P}b \Leftrightarrow LUX = \mathcal{P}b \Leftrightarrow \begin{cases} LY = \mathcal{P}b, \\ UX = Y. \end{cases}$$

En pratique, on résout donc d'abord $LY = \mathcal{P}b$ puis connaissant Y on résout $UX = Y$.

5.5 Décomposition de cholesky

5.5.1 Existence théorique de la Décomposition de cholesky

DÉFINITION 5.5

Soit M une matrice symétrique réelle d'ordre n ($M^t = M$). Elle est dite définie positive si elle vérifie l'une des trois propriétés équivalentes suivantes :

1. Pour toute matrice colonne non nulle \mathbf{x} à n éléments réels, on a $\mathbf{x}^t M \mathbf{x} > 0$.
2. Toutes les valeurs propres de M (qui sont nécessairement réelles) sont strictement positives.
3. La forme bilinéaire symétrique $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $(\mathbf{x}, t) \mapsto \mathbf{x}^t M \mathbf{y}$ est un produit scalaire sur \mathbb{R}^n .

On note par $S_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétrique définie positive.

THÉOREME 5.3 (Décomposition de Cholesky)

. Soit $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. Il existe une unique matrice $T \in M_n(\mathbb{R})$ triangulaire supérieure à coefficients diagonaux strictement positifs telle que $A = T^t T$.

Preuve.

Existence.

Les mineurs principaux de A sont non nuls, et même strictement positifs : en effet, pour $r \in \{1, \dots, n\}$, notons A_r la sous-matrice principale d'ordre r de A . A_r est symétrique. Par ailleurs, comme $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, alors $x^t A x > 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Ainsi, pour tout $x' \in \mathbb{R}^r \setminus \{0\}$, en complétant x' par des zéros en un vecteur x de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, on obtient $x'^t A_r x' = x^t A x > 0$, donc A_r est définie positive : son déterminant est par conséquent strictement positif.

Il s'ensuit que la matrice A possède une décomposition LU : il existe d'uniques matrices $L, D, V \in M_n(\mathbb{R})$, avec L triangulaire inférieure à diagonale unité, D diagonale à coefficients diagonaux strictement positifs, et V triangulaire supérieure à diagonale unité, telles que $A = LDV$. Comme A est symétrique, alors $A = A^t = V^t D L^t$, et par unicité de cette décomposition, on déduit que $V^t = L$. En posant $T = \sqrt{D} V$, on obtient une décomposition de Cholesky de A .

Unicité.

Soit $S \in M_n(\mathbb{R})$ une autre matrice triangulaire supérieure à coefficients diagonaux strictement positifs telle que $A = S^t S$. Alors $ST^{-1} = (TS^{-1})^t$. Le terme de gauche est une matrice triangulaire supérieure, tandis que le terme de droite est une matrice triangulaire inférieure : donc ST^{-1} est une matrice diagonale. De plus, $(ST^{-1})^{-1} = TS^{-1} = (TS^{-1})^t = ST^{-1}$, et tous

les coefficients diagonaux de ST^{-1} sont strictement positifs, donc sont égaux à 1, c'est-à-dire $S = T$.

REMARQUE 5.4 La réciproque est vraie, au sens suivant : si $A \in M_n(\mathbb{R})$ et s'il existe une matrice $T \in M_n(\mathbb{R})$ triangulaire supérieure à coefficients diagonaux strictement positifs tel que $A = T^t T$, alors $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

5.5.2 Calcul pratique de la décomposition de Cholesky

Notons $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ et $T = (t_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ ($t_{i,j} = 0$ si $i > j$). Pour tous $i, j \in \{1, \dots, n\}$, l'égalité $A = (T^t)T$ donne

$$a_{i,j} = \sum_{k=1}^n t_{k,i} t_{k,j} = \sum_{k=1}^{\min(i,j)} t_{k,i} t_{k,j}.$$

La matrice A étant symétrique, il suffit que les relations ci-dessus soient vérifiées pour $i \leq j$, c'est-à-dire que les éléments t_{ij} de la matrice T doivent satisfaire :

$$a_{i,j} = \sum_{k=1}^i t_{k,i} t_{k,j}$$

– Étape 1.

On a $a_{1,1} = t_{1,1}^2$, donc $t_{1,1} = \sqrt{a_{1,1}}$,

- pour $j \in \{2, \dots, n\}$, on a $a_{1,j} = t_{1,1}t_{1,j}$, donc $t_{1,j} = \frac{a_{1,j}}{t_{1,1}}$,
 – Étape i , $2 \leq i \leq n$.

À l'étape i , on suppose qu'on a calculé tous les coefficients $t_{l,j}$ pour $l < i$. On a

$$a_{i,i} = \sum_{k=1}^i t_{k,i}^2$$

donc

$$t_{i,i} = \sqrt{a_{i,i} - \sum_{k=1}^{i-1} t_{k,i}^2}$$

Pour $j \in \{i+1, \dots, n\}$, on a

$$a_{i,j} = \sum_{k=1}^i t_{k,i}t_{k,j}$$

donc

$$t_{i,j} = \frac{1}{t_{i,i}} \left(a_{i,j} - \sum_{k=1}^{i-1} t_{k,i}t_{k,j} \right)$$

Exemple 5.7 La matrice symétrique $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 5 & 5 \\ 1 & 5 & 14 & 14 \\ 1 & 5 & 14 & 15 \end{pmatrix}$

est égale au produit de la matrice triangulaire T et de sa transposée T^t :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 5 & 5 \\ 1 & 5 & 14 & 14 \\ 1 & 5 & 14 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5.5.3 Complexité de la décomposition de Cholesky

Le calcul de $t_{1,1}$ demande le calcul de racine carrée (qu'on va considérer comme une opération arithmétique élémentaire).

Ensuite, si $j \in \{2, \dots, n\}$ le calcul de $t_{1,j}$ requiert une division.

Pour le calcul de $t_{i,i}$ on a besoin de $i - 1$ multiplications, $i - 1$ additions, et un calcul de racine carrée.

Et le calcul de $a_{i,j}$ requiert $i - 1$ multiplications, $i - 1$ additions, et 1 division. Au total, l'étape i requiert $(n - i + 1)(2i - 1)$ opérations arithmétiques élémentaires.

Finalement, le coût total du calcul de la décomposition de Cholesky, en nombre d'opérations arithmétiques élémentaires, est

$$\sum_{i=1}^n (n - i + 1)(2i - 1) = \frac{1}{6}n(2n^2 + 3n + 1)_{n \rightarrow +\infty} \sim \frac{1}{3}n^3.$$

La décomposition de Cholesky est par conséquent légèrement plus efficace que la décomposition LU , dont le coût en nombre d'opérations arithmétiques élémentaires est asymptotiquement équivalent à $\frac{2}{3}n^3$.

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ inversible, la résolution de (S) par la méthode de Gauss demande $\frac{2}{3}n^3$ opérations. Dans le cas d'une matrice symétrique définie positive, la méthode de Cholesky est donc environ deux fois moins chère.

REMARQUE 5.5 1. Soient $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^n$. On cherche à résoudre le système linéaire $Ax = b$. Si A est symétrique définie positive, on peut calculer sa décomposition de Cholesky et procéder à une méthode de descente-remontée afin de déterminer x .

2. Sinon, le système linéaire est équivalent à $A^tAx = A^tb$, où A^tA est bien une matrice symétrique définie positive : on peut donc de même calculer la décomposition de Cholesky de A^tA , et procéder à une méthode de descente-remontée ; cette méthode nécessite les calculs supplémentaires de A^tA et de A^tb , tous deux asymptotiquement négligeables devant le coût de la décomposition de Cholesky (pourvu qu'on dispose d'une méthode efficace pour calculer le produit matriciel A^tA).