Chapter 1: TRANSFORMèE EN Z D'UNE SUITE

1.1 Introduction

La transformèe en z est l'outil d'ètude des systèmes numèriques linèaires invariants dans le temps.

En èlectronique par exemple, un filtre numèrique est un èlèment qui effectue un filtrage à l'aide d'une succession d'opèrations mathèmatiques sur un signal discret. C'est-à-dire qu'il modifie le contenu spectral du signal d'entrèe en diminuant la gravitè ou èliminant certaines composantes spectrales indèsirèes.

Contrairement aux filtres analogiques, qui sont rèalisès à l'aide d'un agencement de composantes physiques (rèsistance, condensateur, inductance, transistor, etc.), les filtres numèriques sont rèalisès soit par des circuits intègrès dèdiès, des processeurs programmables (microprocesseur,microcontrôleur, etc.), soit par logiciel dans un ordinateur.

Les deux principales limitations des filtres numèriques sont la vitesse et le coût.

La vitesse du filtre est limitèe par la vitesse du processeur.

Le coût dèpend du type de processeur utilisè.

les filtres numèriques se retrouvent partout dans notre environnement, radio, tèlèphone cellulaire, tèlèvision, lecteurs MP3, etc.

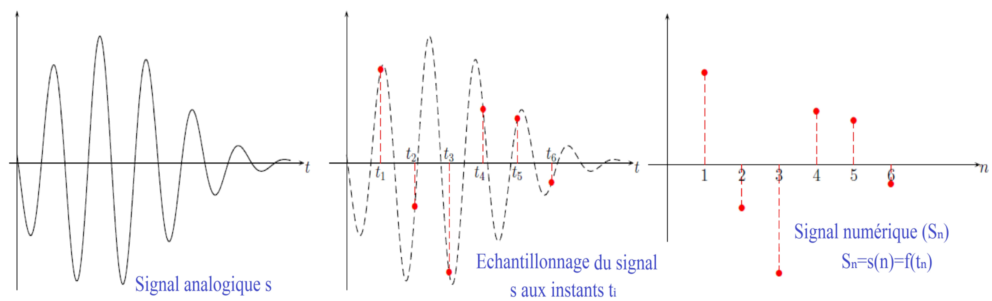
On dispose d'outils adaptés à l'étude de signaux analogiques : les séries de Fourier (lorsque le signal est périodique) et la transformée de Laplace (lorsque le signal est causal).

L'utilisation de plus en plus fréquente de calculateurs numériques nécessite la manipulation de signaux discrets:

1. Soit des suites suites discrètes telles que des suites binaires, utilisées entre autre pour stocker et transmettre de l'information,

2. Soit des suites discrètes provenant de l'échantillonnage d'un signal analogique tel que par exemple la numérisation de signaux audios.

Pour l'étude de tels signaux discrets, l'analogue de la transformée de Laplace est la transformée en z.



Modèle de passage continue discret

s est défini pour tout t réel, $t \geq 0$.

1.2 Définitions et notations

Objectifs:

Après ce cours vous serez en mesure:

1. Calculer la transformèe en Z d'une sèquence,

2. Dèterminer la règion de convergence d'une transformèe en Z,

3. Calcul de l'original de la transformèe en Z,

4. Utiliser les propriètès des transformèe en Z pour trouver la rèponse d'un système discret. (fonction de transfert)

Définition 1.1 *(Transformée en z unilatèrale - Signal causal)*

La transformée en z du signal discret causal ($x_n = 0$ pour $n < 0$) *défini par* $(x_n) = (x(n))$, $n \in \mathbb{N}$, *est la* fonction X de la variable complexe z notée X(z) et dèfinie par:

$$X(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} x(n)z^{-n}$$

Remarque 1.1 1. *La variable n reprèsente en gènèral le temps discrètisè, la variable complexe z n'est qu'un être mathèmatique. Lorsqu'on travaille sur x(n) on dit que l'on est dans le domaine temporel, lorsqu'on travaille sur X(z) le domaine est appelè frèquentiel par analogie avec la transformèe de Fourier.*

2. *La transformée en z,* $X(z)$, *est une série entière de la variable* $z^{-1} = \frac{1}{z}$.

3. *Vu les rèsultats sur le rayon de convergence d'une sèrie entière, on peut dire que trois cas peuvent se prèsenter :*

   - *soit la transformèe en z est dèfinie quel que soit le nombre complexe z, non nu1;*
   - *soit il existe un nombre rèel positif ou nul R tel que pour z tel que —z—¿R la transformèe en z est dèfinie, et pour z tel que —z—¡R la transformèe en z n'est pas dèfinie;*
   - *soit la transformèe en z n'est dèfinie pour aucun nombre complexe z.*

Définition 1.2 *(Transformèes en z bilatère - Signal non causal)*

Si le signal discret $(x(n))$ n'est pas causal, il faut étendre la série entière :

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)z^{-n}$$

Remarque 1.2 ***(Zone de Définition)***

1. *On a*

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} x(n)\ z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n} = X_1(z) + X_2(z)$$

L'application du critère de Cauchy à la série $X_2(z)$ *mène à*

$\lim_{n\to\infty} |x(n)z^{-n}|^{1/n} < 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} |x(n)|^{1/n}|z^{-1}| < 1$

En appelant R_g *la limite,* $R_g = \lim_{n\to\infty} |x(n)|^{1/n}$ *la série* $X_2(z)$ *converge pour* $|z| > R_g$

Pour ce qui est de la série $X_1(z)$*, après un changement de variable, on a*

$$X_1(z) \;=\; \sum_{n=-\infty}^{-1} x(n)\; z^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} x(-n) z^n$$

On a convergence si $|z| < [\lim_{n\to\infty} |x(-n)|^{1/n}]^{-1} = R_d$

En toute généralité, une série converge dans un anneau du plan complexe des z donné par $R_g < |z| < R_d$*, appelè couronne de convergence*

$$\mathcal{C}_c = \{z \in \mathbb{C} | R_g < |z| < R_d\}$$

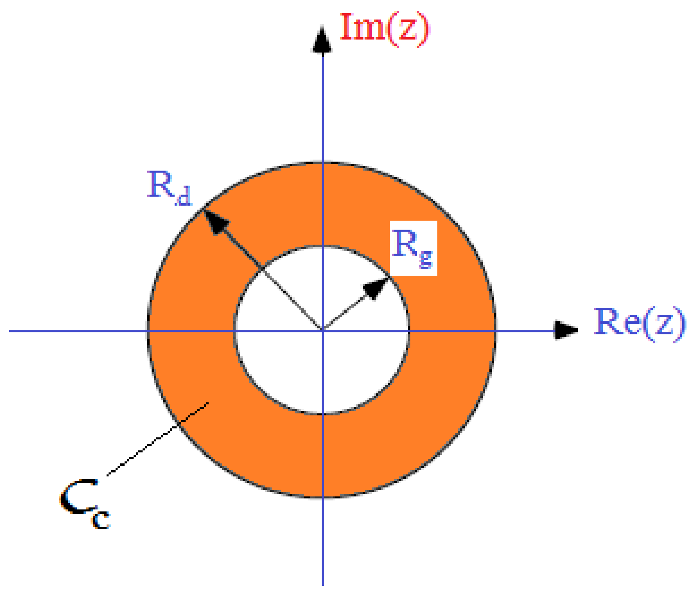


Illustration d'un anneau de convergence

2. *Lorsque* $R_d \leq R_g$ *il est clair que la série ne converge pas.*

3. *La série* $X_2(z)$ *représente la transformée en z d'un signal causale. En général, une série*

causale converge à l'extérieur d'un cercle de rayon R_g. La série $X_1(z)$ représente la transformée en z d'un signal anti-causale, c'est-à-dire ne comportant des éléments que pourles valeurs négatives de l'indice. En général, une série anti-causale converge à l'intérieur d'un cercle de rayon R_d.

4. *$x(n) = a^n$ pour $n \in \mathbb{Z}$:, en appliquant les formules qui permettent de calculer les deux rayons délimitant l'anneau de convergence, on trouve $R_g = R_d = |a|$ et donc la transformée en z n'existe pas.*

5. *Quand une séquence est à durée limitée, sa transformée est donnée par*

   $X(z) = \sum_{n=n_1}^{n_2} x(n)z^{-n}$

Exemple 1.1 *(**Transformées en z usuelles**: Suite de référence)*

1. ***Suite de Dirac** : La suite de Dirac (ou suite canonique) est la suite δ définie par*

$$\begin{cases} \delta(0) = 1 \\ \delta(n) = 0 \text{ pour } n \neq 0 \end{cases}$$

   $X(z) = 1$

2. ***Dirac retardé** : La suite de Dirac retardée de $k(k \in IN\,)$ est la suite δ_k définie par*

$$\begin{cases} \delta_k(k) = 1 \\ \delta_k(n) = 0 \text{ pour } n \neq k \end{cases}$$

   $X(z) = z^{-k}$

3. ***Echelon unité discret** : L'échelon unité discret u est défini par*

$$\begin{cases} u(n) = 1 \text{ si } n \geq 0 \\ u(n) = 0 \text{ si } n < 0 \end{cases}$$

   $X(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} z^{-k} = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}$ *pour* $|z^{-1}| < 1 \Leftrightarrow |z| > 1.$

4. ***Rampe unité causale** : La rampe unité causale est définie par*

$$r(n) = nu(n) = \begin{cases} n \text{ si } n \geq 0 \\ 0 \text{ si } n < 0 \end{cases}$$

$X(z) = \frac{z}{(z-1)^2}$ *pour* $|z| > 1$.

5. ***Signal carré discret causal** : Le signal carré discret causal est défini par*

$$c(n) = n^2 u(n) = \begin{cases} n^2 \text{ si } n \geq 0 \\ 0 \text{ si } n < 0 \end{cases}$$

$X(z) = \frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$ *pour* $|z| > 1$.

6. ***Signal puissance discret causal** : Ce signal discret causal est défini par*

$$f(n) = b^n u(n) = \begin{cases} b^n \text{ si } n \geq 0 \\ 0 \text{ si } n < 0 \end{cases}$$

$X(z) = \frac{z}{z-b}$ *pour* $|z| > |b|$.

1.3 Propriétés de la transformée en z

1. **Linéarité :**

   La linéarité de la transformation signifie que la transformée d'une séquence obtenue par combinaison linéaire d'autres séquences n'est rien d'autre que la combinaison linéaire des transformées correspondantes. Si donc

   $x(n) = ax_1(n) + bx_2(n)$

   alors

$$
\begin{aligned}
X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\ z^{-n} \\
&= a \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n)\ z^{-n} + b \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2(n)\ z^{-n} \\
&= aX_1(z) + bX_2(z)
\end{aligned}
$$

   La région de convergence est au moins l'intersection des régions associées à $X_1(z)$ et $X_2(z)$ car la combinaison linéaire peut introduire des zéros qui compensent certains pôles.

2. **Signal retardé** Soient x un signal causal, $k \in \mathbb{N}$ et y la suite de terme général que l′on appelle le signal x retardé de k.

$$
y_n = \begin{cases} 0 \text{ si } k > n, \\ x_{n-k} \text{ sinon} \end{cases}
$$

   Alors $X(\text{z})$ et $Y(\text{z})$ ont même rayon de convergence et dans leur domaine d′*existence*

$$
Y(\text{z}) = \text{z}^{-k} X(\text{z}).
$$

   Si $k = 0$ le signal x retardé de k est x lui-même.

   En effet :

Si x est causal, alors y de même et on ècrit:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} y_n z^n = \sum_{n=k}^{+\infty} x_{n-k} z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n z^{-n-k} = z^{-k} \sum_{n=0}^{+\infty} x_n z^{-n}.$$

Remarque 1.3 *(Retard et transfomée Causal ou unilatéral)*

(a) Si x est bilatére: On a

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} y_n z^n = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_{n-k} z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n z^{-n-k} = z^{-k} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n z^{-n}.$$

(b) Dans le cas unilatéral, il faut être plus prudent dans ce que l'on écrit. En effet, la transformée unilatérale est définie par 1.2. Si on pose y(n) =x(n -1), la transformée en z est calculée par

$$Y(z) \; = \; \sum_{n=0}^{\infty} y(n) \; z^{-n} = \; \sum_{n=0}^{\infty} x(n \; - 1) z^{-n}$$

$$= \; z^{-1} \sum_{m=-1}^{\infty} x(m) z^{-m} = \; z^{-1}[x(-1)z + X(z)] = x(-1) + z^{-1} X(z) \quad (**)$$

On voit donc qu'un décalage vers la droite permet de faire apparaitre *des éléments qui ne sont pas pris en considération par la transformation de départ. Cette propriété permet de tenir compte de conditions initiales non nulles.*

Exercice 1.1 *On considère une suite* $(\mathrm{x_n})_{\mathrm{n} \in \mathrm{N}}$ *et X sa transformée en* z *. On définit la suite* $(\mathrm{y_n})_{\mathrm{n} \in \mathrm{N}}$ *par* $\mathrm{y_n} = \sum_{\mathrm{k}=0}^{\mathrm{n}} \mathrm{x_k}$

Déterminez une équation ⟨⟨ aux différences ⟩⟩ entre les suites $(\mathrm{x_n})_{\mathrm{n} \in \mathrm{N}}$ *et* $(\mathrm{y_n})_{\mathrm{n} \in \mathrm{N}}$*. Déduisez-en la transformée en* z *de* $(\mathrm{y_n})_{\mathrm{n} \in \mathrm{N}}$*.*

Solution:

Pour tout n entier, on a $\mathrm{y_n} - \mathrm{y_{n-1}} = \mathrm{x_n}$, en considérant que $\mathrm{y_{-1}} = 0$.

Donc $\mathrm{Y(z)} - \mathrm{z^{-1}Y(z)} = \mathrm{X(z)}$, donc: $\mathrm{Y(z)} = \frac{1}{1-\mathrm{z}^{-1}} \mathrm{X(z)} = \frac{\mathrm{z}}{\mathrm{z}-1} \mathrm{X(z)}$

3. **Signal avancé** Soient x un signal causal, $k \in \mathbb{N}^*$ et y la suite causal définie par $y_n = x_{n+k}$.

Alors $X(\mathrm{z})$ et $Y(\mathrm{z})$ ont même rayon de convergence et dans leur domaine d'*existence*

$$Y(\mathrm{z}) = \mathrm{z}^k(X(\mathrm{z}) - \sum_{n=0}^{k-1} x_n \mathrm{z}^{-n}).$$

En effet : On a $\sum_{n=0}^{+\infty} y_n \mathrm{z}^n = \sum_{n=0}^{+\infty} x_{n+k}\mathrm{z}^{-n} = \sum_{n=k}^{+\infty} x_n \mathrm{z}^{-n+k} = \mathrm{z}^k \sum_{n=k}^{+\infty} x_n \mathrm{z}^{-n} = \mathrm{z}^k(\sum_{n=0}^{+\infty} x_n \mathrm{z}^{-n} - \sum_{n=0}^{k-1} x_n \mathrm{z}^{-n})$.

Remarque 1.4 *(a) Si le signal x_n n'est pas causal, alors on a de même pour $y_n = x_{n+k}$ par suite:*

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} y_n \mathrm{z}^n = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_{n+k}\mathrm{z}^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n \mathrm{z}^{-n+k} = \mathrm{z}^k \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n \mathrm{z}^{-n} = \mathrm{z}^k.X(z).$$

(b) Supposons que le signal x_n est causal et on veut que le système numèrique sort un signal $y_n = x_{n+k}$ bilatere. Alors:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} y_n \mathrm{z}^n = \sum_{n=-k}^{+\infty} x_{n+k}\mathrm{z}^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n \mathrm{z}^{-n+k} = \mathrm{z}^k \sum_{n=0}^{+\infty} x_n \mathrm{z}^{-n} = \mathrm{z}^k.X(z).$$

Cas particulier

Pour ou $k = 1$ on a $y_n = x_{n+1}$ de sorte que d' après la proposition précédente

$$Y(\mathrm{z}) = z(X(\mathrm{z}) - x_0).$$

Si de plus $x_0 = 0$ alors $Y(\mathrm{z}) = zX(\mathrm{z})$.

Exemple 1.2 *(a)* $Z[\mathrm{x_{n+3}}](\mathrm{z}) = \mathrm{z}^3 Z[\mathrm{x_n}](\mathrm{z}) - \mathrm{x_0 z^3} - \mathrm{x_1 z^2} - \mathrm{x_2 z}$.

(b) Si $y_n = n+1$ on a $Y(z) = \frac{\mathrm{z}^2}{(\mathrm{z}-1)^2}$ pour tout $|z| > 1$ (puisque $S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)\mathrm{z}^n = \frac{1}{(1-\mathrm{z})^2}$ pour tout $|z| < 1$ d'après un exemple vu précédemment). De plus d'*après la proposition* précédente *$Y(z) = zY(z)$ où $x_n = n$ pour tout n de sorte que $Y(x) = \frac{z}{(\mathrm{z}-1)^2}$ pour tout $|z| > 1$.*

(c) *La propriété de décalage permet de traiter les équations aux différences. A partir de*

$$y(n) = x(n) - b_1 y(n-1) - b_2 y(n-2)$$

on trouve par transformation en z,

$$\begin{aligned} Y(z) &= X(z) - b_1 z^{-1} Y(z) - b_2 z^{-2} Y(z) \\ Y(z) &= \frac{X(z)}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}} \end{aligned}$$

(d) *Dans le cas unilatéral, Soit* $y(n) = x(n) + ay(n-1)$ *avec* $y(-1) = K$ *et une excitation* $x(n) = b^n u(n)$. *En vertu de (**), la transformée en z donne*

$$\begin{aligned} Y(z) &= X(z) + ay(-1) + az^{-1}Y(z) = \frac{Y(z) + ay(-1)}{1 - az^{-1}} \\ &= \frac{aK}{1 - az^{-1}} + \frac{1}{(1 - az^{-1})(1 - bz^{-1})}. \end{aligned}$$

4. **Dérivation:** Comme $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}$, on a aussi

$$\frac{\mathrm{d}X(z)}{\mathrm{d}z} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-n) x(n) z^{-n-1}$$

Et donc

$$-z\frac{\mathrm{d}X(z)}{\mathrm{d}z} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} n x(n) z^{-n}$$

De ce fait, il apparait que $-z\mathrm{d}X(z)/\mathrm{d}z$ est la transformée de $nx(n)$.

5. **Multiplication par une exponentielle** Soit $y_n = a^n x(n)$, alors :

$$\begin{aligned} Y(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n x(n) z^{-n} \quad a \neq 0 \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) (\frac{z}{a})^{-n} = X(\frac{z}{a}). \end{aligned}$$

Exemple 1.3 ⟨⟨ *Rampe de vitesse* ⟩⟩.

$Z[\mathrm{n}^2](\mathrm{z}) = Z[\mathrm{n.\ n}](\mathrm{z}) = -Z\,(\frac{\mathrm{z}}{(\mathrm{z}-1)^2})' = \frac{-\mathrm{z}(-1-\mathrm{z})}{(\mathrm{z}-1)^3} = \frac{\mathrm{z}(\mathrm{z}+1)}{(\mathrm{z}-1)^3}$

On remarquera que, ici, ceci est valable pour z *tel que* $|\mathrm{z}| > 1$*. On retiendra :*

$$Z[\mathrm{n}^2](\mathrm{z}) = \frac{\mathrm{z}(\mathrm{z}+1)}{(\mathrm{z}-1)^3} = \frac{\mathrm{z}^{-1}(1+\mathrm{z}^{-1})}{(1-\mathrm{z}^{-1})^3}.$$

6. **Convolution** La transformèe en Z d'un produit de convolution est le produit des transformèes en Z.

   On dèfinit le produit de convolution de deux suites par : $(x * y)\,(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x\,(n-k)\,y\,(k)$.

   Alors

$$(X * Y)(z) = X(z).Y(z)$$

En effet:

$$\begin{aligned}
(X * Y)(z) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (x \star y)\,(n)\,z^{-n} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x\,(n-k)\,y\,(k)\,z^{-(n-k)}z^{-k} \\
&= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x\,(m)\,y\,(k)\,z^{-m}z^{-k} \\
&= \left(\sum_{m=-\infty}^{+\infty} x\,(m)\,z^{-m}\right)\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} y\,(k)\,z^{-k}\right)
\end{aligned}$$

Exemple 1.4 *1. Considérons un système linéaire et permanent de réponse impulsionnelle.*

g(n) $= a^n u(n)$ *et* $|a| < 1$ *dont le signal* $x(n)$ *à l'entrée est la séquence* $x(n) = b^n u(n)$ *et* $|b| < 1$ *avec de plus* $|b| > |a|$*.*

La sortie $y(n)$ *est obtenue par* $y(n) = x(n) * g(n)$*.*

Les transformées $X(z)$ *et* $G(z)$ *sont données par*

$$X(z) = \frac{1}{1 - bz^{-1}} pour |z| > |b|$$

$$G(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} pour |z| > |a|$$

En vertu de ce qui précède, on a donc pour $|z| > |b|$ *qui est donc l'intersection des domaines* *de convergence,*

$$\begin{aligned} Y(z) &= G(z)X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}}\frac{1}{1-bz^{-1}} \\ &= \frac{1}{(1-b/a)(1-az^{-1})} + \frac{1}{(1-a/b)(1-bz^{-1})} \\ &= \frac{a}{(a-b)(1-az^{-1})} + \frac{b}{(b-a)(1-bz^{-1})} \end{aligned}$$

et donc, compte tenu des transformées calculées précédemment,

$$y(n) = u(n)[\frac{a}{(a-b)}a^n + \frac{b}{(b-a)}b^n]$$

7. **Thèorème de la valeur initiale**: Soit $x(n)$ un signal causal et $X(z)$ sa transformèe en Z. Alors :

$$x(0) = \lim_{z\to+\infty} X(z)$$

8. **Thèorème de la valeur finale**: Soit $x(n)$ un signal causal et $X(z)$ sa transformèe en Z. Alors lorsque la limite de gauche existe, on peut ècrire :

$$\lim_{n\to+\infty} x(n) = \lim_{z\to 1, |z|>1} (z-1)X(z)$$

En effet : on notera que le fait que $\lim_{n\to+\infty} x(n)$ existe implique la suite $(x(n))$ est bornèe et donc que le rayon de convergence ρ_1 de $X(z)$ est infèrieur ou ègal à 1. On a

$$(z-1)X(z) = \lim_{n\to\infty} S_n(z)$$

avec

$$S_n(z) = x(0)z + \sum_{i=0}^{n} (x(i+1) - x(i))\, z^{-i}$$

et cette suite de fonctions est uniformèment convergente dans l'ouvert $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$. Le point 1 appartient à l'adhèrence de U et pour $z \to 1$, $S_n(z)$ converge vers $x(n)$. D'après le ”thèorème de la double limite”, on a donc

$$\lim_{z\to 1,|z|>1}\lim_{n\to\infty} S_n(z) = \lim_{n\to\infty}\left(\lim_{z\to 1,|z|>1} S_n(z)\right) = \lim_{n\to\infty} x(n).$$

Remarque 1.5 *Une autre expression de ce thèorème: Soit une suite* $(\mathrm{x_n})_{\mathrm{n\in N}}$ *et X sa transformée en* z.

On suppose que X peut être définie sur $\mathbb{C}$ *privé d'un nombre fini de points, tous à l'*intérieur *du cercle* unité, *sauf éventuellement un pôle simple en 1. Alors :*

$\lim_{\mathrm{z}\to 1}(1-\mathrm{z}^{-1})\mathrm{X(z)} = \lim_{\mathrm{z}\to 1}(\frac{\mathrm{z}-1}{\mathrm{z}})\mathrm{X(z)} = \lim_{\mathrm{n}\to+\infty}\mathrm{x_n}$, *cette limite étant finie.*

Exemple 1.5 *Soit* $(\mathrm{x_n})$ *est une suite géométrique, avec* $\mathrm{x_n} = \mathrm{a^n}$ *et* $|\ a\ | < 1$, X *a un pôle (a) à l'intérieur du cercle* unité, *on a*

$\lim_{\mathrm{z}\to 1}(1-\mathrm{z}^{-1})\mathrm{X(z)} = \lim_{\mathrm{z}\to 1}\frac{\mathrm{z}-1}{\mathrm{z}}\frac{\mathrm{z}}{\mathrm{z-a}} = 0 = \lim_{\mathrm{n}\to+\infty}\mathrm{x_n}$.

Commentaires concernant les hvpothèses :

(a) Dans le cas de la ⟨⟨ rampe ⟩⟩, c'est-à-dire lorsque $\mathrm{x_n} = \mathrm{n}$, X a un pôle double en 1, et

$\lim_{\mathrm{z}\to 1}(1-\mathrm{z}^{-1})\mathrm{X(z)} = \lim_{\mathrm{z}\to 1}\frac{\mathrm{z}-1}{\mathrm{z}}\frac{\mathrm{z}}{(\mathrm{z}-1)^2} = \lim_{\mathrm{z}\to 1}\frac{1}{(\mathrm{z}-1)}$

que l'on peut considérer donner la limite de $(\mathrm{x_n})$ en se restreignant aux valeurs réelles de z supérieures à 1.

On remarquera qu'avec les mêmes hypothèses, plus l'existence de la limite de $(\mathrm{a_n})$, dans le cas général d'un pôle double en 1, on a :

$$\lim_{\mathrm{z}\to 1}|(1-\mathrm{z}^{-1})\mathrm{X(z)}| = \lim_{\mathrm{n}\to+\infty}|\mathrm{x_n}|,$$

cette limite ici étant infinie.

(b) Cependant le cas des signaux sinusoidaux échantillonnés enlève l'espoir d'hypothèses plus larges.

En effet pour ωT différent d'un multiple de $2\pi,$ c$'$est$-$à-dire lorsque la période d$'$échantillonnage n'est pas un multiple de la période du signal (ce qui ferait que l'échantillonné serait constant), on a

$$Z[\sin(\omega \mathrm{nT})](\mathrm{z}) = \frac{\sin(\omega \mathrm{T})\mathrm{z}}{\mathrm{z}^2 - 2\cos(\omega \mathrm{T})\mathrm{z} + 1}$$

donc la transformée a des pôles ($\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega \mathrm{T}}$ et $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega \mathrm{T}}$) sur le cercle unité différents de 1, et

$$\lim_{\mathrm{z}\to 1}(1-\mathrm{z}^{-1})\mathrm{X}(\mathrm{z}) = \lim_{\mathrm{z}\to 1} \frac{\mathrm{z}-1}{\mathrm{z}} \frac{\sin(0)\mathrm{T})\mathrm{z}}{\mathrm{z}^2 - 2\cos(0)\mathrm{T})\mathrm{z} + 1} = \lim_{\mathrm{z}\to 1} \frac{\sin(0)\mathrm{T})(\mathrm{z}-1)}{\mathrm{z}^2 - 2\cos(0)\mathrm{T})\mathrm{z} + 1} = 0,$$

qui n'est bien sûr pas la limite de l'échantillonné !

1.4 Transformée en z inverse

Définition 1.3 *(Transformée en z inverse)*

Si x est un signal causal discret et si $X(z)$ est sa transformée en z, la suite $(x(n))$, $n \in \mathbb{N}$ est appelée original ou transformée en z inverse de X(z). *On note $(Z^{-1}X)(n) = x(n)$.*

Propriété 1.1 • *Si l'original $x(n)$ de $X(z)$ existe, alors elle est unique.*

• *Linéarité:* $(X+Y)^{-1}(z)) = (X^{-1}(z)) + (Y^{-1}(z))$ *et* $(kX)^{-1}(z) = k(X^{-1}(z))$

1.4.1 Méthodes de recherche de l'original

Pour retrouver le signal discret original $x(n)$:

1. on décompose en éléments simples $X(z)$ ou $\frac{X(z)}{z}$, ou encore $\frac{X(z)}{z^k}$ (lorsque le degré du numèrateur de $X(z)$ est supérieur ou égal au degré de son dènominateur).

   Les éléments le plus fréquemment rencontrés sont de la forme:

   (a) $\frac{z}{z-1}$ *original* $u(n)$ (échelon unité discret)

   (b) $\frac{z}{z-b}$ *original* $b^n u(n)$

   (c) $\frac{z}{(z-1)^2}$ original $nu(n)$ (rampe unité causale)

   Principe: On peut décomposer une fonction de forme compliquée en une somme de fonctions simples, et prendre la transformée inverse de chacun des éléments. Comme on le verra, de nombreux systèmes requièrent l'étude de transformées du type

$$X(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

   où P et Q sont des polynômes en z ou z^{-1}. On peut alors décomposer $X(z)$ en fractions simples et obtenir la transformée inverse par la somme des transformées inverses. La transformée peut se mettre sous la forme

$$X(z) = S(z) + \frac{P_0(z)}{Q(z)}$$

où le degré de $P_0(z)$ est inférieur à celui de $Q(z)$. En fait, $S(z)$ et $P_0(z)$ sont respectivement le quotient et le reste de la division de P par Q. Si le degré de P est inférieur à celui de Q, le quotient S est nul.

Lorsque les racines z_i de $Q(z)$, appelées pôles sont simples, on peut mettre le quotient sous la forme

$\frac{P_0(z)}{Q(z)} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\alpha_i}{z-z_i}$ avec $\alpha_i = [(z-z_i)\frac{P_0(z)}{Q(z)}]_{z=z_i}$

Si un pôle z_n est d'ordre $q > 1$, la décomposition prend la forme

$\frac{P_0(z)}{Q(z)} = \sum_{i=1,\neq n}^{N} \frac{\alpha_i}{z-z_i} + \sum_{j=1}^{q} \frac{\beta_j}{(z-z_n)^j}$

avec

$\beta_j = \frac{1}{(q-j)!} \frac{\mathrm{d}^{q-j}}{\mathrm{d}z^{q-j}} [(z-z_n)^q \frac{P_0(z)}{Q(z)}]_{z=z_n}$

2. On développe en série entière $X(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^{-n}$, et on a alors simplement $x(n) = a_n$.

3. La transformèe en z inverse est donnèe par :

$$x(n) = X^{-1}(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C X(z) z^{n-1} dz$$

où C est un chemin fermè parcouru dans le sens inverse des aiguilles d'une montre et appartenant entièrement au domaine de convergence.

En pratique, ce calcul s'effectue souvent à l'aide du thèorème des rèsidus et la formule devient dans le cas d'un signal causal :

$$x(n) = \sum_{z_k = \text{pôles de } z^{n-1}X(z)} \mathrm{Res}_{\mathrm{k}}\{z^{n-1}X(z)\}_{z=z_k}$$

Le résidu $r_k = Res_k(z^{n-1}X(z)_{z=z_k}$ à un pôle d'ordre k en $z = a$ est donné par

$r_k = \lim_{z \to a} \frac{1}{(k-1)!} \frac{\mathrm{d}^{k-1}}{\mathrm{d}z^{k-1}} [X(z) z^{n-1} (z-a)^k]$

Pour un pôle simple ($k = 1$) en $z = a$, l'expression du résidu r_1 se réduit à

$r_1 = \lim_{z \to a} [X(z) z^{n-1} (z-a)]$

Exemples 1.1 *1. Considérons la transform ée donnée par*

$$X(z) = \frac{1}{1 - 3z^{-1} + 2z^{-2}}$$

pour $|z| > 2$. *Comme nous considérons que la variable est* z^{-1}, *le degré du numérateur est bien inférieur à celui du dénominateur.*

Les pôles sont donnés par $z^{-1} = 1$ *et* $z^{-1} = 0.5$. *On recherche donc une décomposition en fractions simples du type*

$$X(z) = \frac{0.5}{(z^{-1} - 1)(z^{-1} - 0.5)} = \frac{\alpha_1}{z^{-1} - 1} + \frac{\alpha_2}{z^{-1} - 0.5}$$

On trouve en utilisant ce qui a été vu précédemment,

$$X(z) = \frac{1}{z^{-1} - 1} + \frac{-1}{z^{-1} - 0.5}$$

Dès lors, $X(z) = \frac{2}{1-2z^{-1}} - \frac{1}{1-z^{-1}}$. *On trouve de ce fait*

$$x(n) = 2 \times 2^n u(n) - u(n) = (2^{n+1} - 1)u(n)$$

Si on avait considéré les polynômes comme des fonctions de z, *on aurait eu*

$$\begin{aligned} X(z) &= \frac{1}{1 - 3z^{-1} + 2z^{-2}} = \frac{z^2}{z^2 - 3z + 2} \\ &= 1 + \frac{3z - 2}{z^2 - 3z + 2} = 1 + \frac{3z - 2}{(z - 2)(z - 1)} \\ &= 1 + \frac{4}{(z - 2)} + \frac{-1}{(z - 1)} = 1 + \frac{4z^{-1}}{(1 - 2z^{-1})} - \frac{z^{-1}}{(1 - z^{-1})} \end{aligned}$$

En s'aidant de la propriété du retard on a que

$$x(n) = \delta(n) + 4 \times 2^{n-1} u(n - 1) - u(n - 1)$$

Cette forme est moins concise que la précédente.

2. *On recherche l'original de* $X(z) = \frac{1}{(z-2)(z-3)}$.

   $X(z)$ *se décompose en éléments simples suivant (faire le calcul!) :* $X(z) = \frac{-1}{z-2} + \frac{1}{z-3}$.

   On écrit alors

$$X(z) = -z^{-1}(\frac{z}{z-2}) + z^{-1}(\frac{z}{z-3}).$$

   L'originale de $\frac{z}{z-2}$ *est* $2^n u(n)$, *tandis que l'originale de* $\frac{z}{z-3}$ *est* $3^n u(n)$.

   Le facteur z^{-1} *correspond à un retard de 1.*

   On obtient donc l'originale de $X(z)$ *:*

$$x(n) = -2^{n-1}u(n-1) + 3^{n-1}u(n-1) = (-2^{n-1} + 3^{n-1})u(n-1).$$

3. *On recherche l'originale de* $X(z) = \frac{z^3-3z}{(z+3)(z-1)^2} \quad \mid z \mid > 3$.

   Le degré du numérateur étant égal à celui du dénominateur, on décompose $\frac{X(z)}{z}$ *en éléments simples.*

   On obtient (faire le calcul!) :

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{-1}{2}\frac{1}{(z-1)^2} + \frac{1}{z-1}\frac{5}{8} + \frac{1}{z3}\frac{3}{+8}$$

   soit $X(z) = -\frac{1}{2}\frac{z}{(z-1)^2} + \frac{5}{8}\frac{z}{z-1} + \frac{3}{8}\frac{z}{z+3}$, *d'où,*

$$x(n) = -\frac{1}{2}nu(n) + \frac{5}{8}u(n) + \frac{3}{8}(-3)^n u(n) = (-\frac{1}{2}n + \frac{5}{8} + \frac{3}{8}(-3)^n)u(n)$$

4. ***La sèrie gènèratrice de la suite de Fibonacci***

   Soit $F(z) = \dfrac{z}{z^2-z-1}$. *Pour retrouver la formule de Binet, procèdons à la transformation inverse. La mèthode des fractions rationnelles peut être tentèe. Le dènominateur possède deux pôles,* z_0 *et* z_1 *qui sont le nombre d'or :* $z_0 = \varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ *et l'opposè de son inverse:* $z_1 = 1 - \varphi = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$. *Pour les calculs rencontrès ci-dessous on se servira des propriètès* *suivantes de z_0 et z_1 :*

$$z_0 - z_1 = (2 \cdot z_0 - 1) = \sqrt{5} \; et \; (z - z_0) \cdot (z - z_1) = z^2 - z - 1.$$

La fonction se dècompose en fractions rationnelles èlèmentaires que l'on rèècrit un peu :

$$F(z) = \frac{z}{z^2 - z - 1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{z_0}{z - z_0} - \frac{z_1}{z - z_1} \right) = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(z_0 \cdot \frac{1}{z - z_0} - z_1 \cdot \frac{1}{z - z_1} \right).$$

Une fraction du type $1/(z - z_0)$ peut se travailler ainsi :

$$\frac{1}{(z - z_0)} = \frac{z}{(z - z_0)} \cdot \frac{1}{z}$$

La première partie ètant la transformèe de la formule usuelle exponentielle , z_0^n, la seconde partie $1/z$ ètant le retard pur d'un cran. Si bien que la transformèe inverse de cette fraction èlèmentaire est z_0^{n-1}, en appliquant les règles de combinaisons linèaire nous calculons la suite cherchèe :

$$\mathcal{F}_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(z_0 \cdot z_0^{n-1} - z_1 \cdot z_1^{n-1} \right) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(z_0^n - z_1^n \right).$$

5. *Déterminer, par la méthode des résidus, la suite* x *causal dont la transformée en x est $X(z) = \frac{1}{(z\ +1)(z\ +2)}$*

   Considérons $g(z) = z^{n-1} X(z) = \frac{z^{n-1}}{(z+1)(z+2)}$ qui possède un pôle simple en 0 quand $n = 0$ mais pas pour $n \geq 1$. Ainsi les cas $n = 0$ et $n \geq 1$ doivent être considérés séparément.

   Pour $n = 0,\ g(z) = \frac{1}{z(z+1)(z+2)}$. Puis

$$\mathrm{Res}(g(z), 0) = \frac{1}{2},\ \mathrm{Res}(g(z),\ -1) = -1 \quad et \quad \mathrm{Res}(g(z),\ -2) = \frac{1}{2}$$

   de sorte que $x_0 = \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2} = 0$.

   Pour $n \geq 1,\ g(z) = \frac{z^{n-1}}{(z\ +1)(z+2)}$, on a

$$\mathrm{Res}(g(z),\ -1) = (-1)^{n-1} \quad et \quad \mathrm{Res}(g(z),\ -2) = -(-2)^{n-1},$$

donc $x_n = (-1)^{n-1} - (-2)^{n-1}$ *pour tout* $n \geq 1$.

Déterminer la suite x *causal dont la transformée en z est* $X(z) = \frac{z^2}{(z+3)^2}$.

On pose $g(z) = z^{n-1}X(z) = \frac{z^{n+1}}{(z+3)^2}$. *Il* y *a un pôle double en* $z = -3$. *Donc*

$$\mathrm{Res}(g(z),\ -3) = \frac{d}{dz}((z+3)^2 g(z))|_{z=-3} = (n\ +1)(-3)^n.$$

Il en résulte donc que $x_n = (n\ +1)(-3)^n$.

Déterminer la suite x *bilatere dont la transformée en z est* $X\ (z) = \frac{1}{1-z^{-1}}$

Le domaine de convergence est $|z| > 1$. *En utilisant la formule d'inversion, on a donc que*

$$x(n)\ =\ \frac{1}{2\pi j}\oint_\Gamma \frac{z^{n-1}}{1-z^{-1}}\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi j}\oint_\Gamma \frac{z^n}{z-1}\mathrm{d}z$$

où le contour Γ *peut être un cercle de rayon plus grand que l'unité.*

Pour $n \geq 0$, *on n'a qu'un pôle d'ordre 1 en* $z = 1$ *qui est entouré par le contour. Le résidu en ce pôle est donné par* r_1 *valant*

$$r_1 = \lim_{z\to 1}[z^n] = 1$$

On a donc $x(n \geq 0) = 1$.

En ce qui concerne $n < 0$, *on a cette fois un autre pôle d'ordre* $(-n)$ *en* $z = 0$. *L'application de la formule du résidu donne, pour* $q = -n$,

$$r_q = \lim_{z\to 0}\frac{1}{(q-1)!}\frac{\mathrm{d}^{q-1}}{\mathrm{d}z^{q-1}}[\frac{1}{z-1}] = -1$$

autre résidu vaut toujours 1 et la somme donne donc 0. *On a donc* $x(n \leq -1) = 1 - 1 = 0$.

1.4.2 Transformée en z usuel

	Signal $x(n)$	Transformée en z	Domaine de convergence
1	$\delta[n]$	1	$\mathbb{C}$
2	$u[n]$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$\|z\| > 1$
3	$nu[n]$	$\frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$	$\|z\| > 1$
4	$a^n u[n]$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$\|z\| > \|a\|$
5	$na^n u[n]$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\|z\| > \|a\|$
6	$-a^n u[-n-1]$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$\|z\| < \|a\|$
7	$-na^n u[-n-1]$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\|z\| < \|a\|$
8	$\cos(\omega_0 n)u[n]$	$\frac{1-z^{-1}\cos(\omega_0)}{1-2z^{-1}\cos(\omega_0)+z^{-2}}$	$\|z\| > 1$
9	$\sin(\omega_0 n)u[n]$	$\frac{z^{-1}\sin(\omega_0)}{1-2z^{-1}\cos(\omega_0)+z^{-2}}$	$\|z\| > 1$
10	$a^n \cos(\omega_0 n)u[n]$	$\frac{1-az^{-1}\cos(\omega_0)}{1-2az^{-1}\cos(\omega_0)+a^2z^{-2}}$	$\|z\| > \|a\|$
11	$a^n \sin(\omega_0 n)u[n]$	$\frac{az^{-1}\sin(\omega_0)}{1-2az^{-1}\cos(\omega_0)+a^2z^{-2}}$	$\|z\| > \|a\|$