Contents

Chapter 1: INTERPOLATION DE LAGRANGE

1.1 Introduction

En analyse numérique l'interpolation est un outil mathématique permettant de remplacer une courbe ou une fonction par une autre fonction plus simple a manipuler, qui coïncide avec la première en un nombre fini de points donnés au départ et suivant la manière d'interpolation il peut aussi être demandé de plus à la courbe ou à la fonction construite de vérifier certaines propriétés supplémentaires. Le choix des points dites d'interpolation est un élément important dans le bon fonctionnement de la construction.

L'interpolation d'une fonction doit être distinguée de l'approximation de fonctions, qui consiste à chercher la fonction la plus proche possible, selon certains critères, d'une fonction donnée. Dans le cas de l'approximation, il n'est en général plus imposé de passer exactement par des points donnés initialement.

Soit $\mathbb{C}_n[X]$ l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à n .

On rappelle que 1, X, X^2, ..., X^n est une base de $\mathbb{C}_n[X]$ ($\dim_{\mathbb{C}}\mathbb{C}_n[X] = n+1$).

On note δ_{ij} le symbole de Kronecker : $\begin{cases} \delta_{i,j} = 1 \quad si \quad i = j \\ \delta_{i,j} = 0 \quad si \quad i \neq j \end{cases}$;

1.2 Interpolation de Lagrange

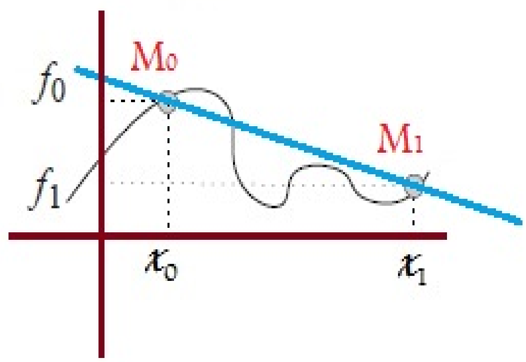
1.2.1 Base des polynômes de Lagrange, définition des polynômes $\mathbf{L}_i$

Joseph Louis Lagrange, mathématicien français est né en 1736 et est mort en 1813 .

On cherche, dans ce paragraphe, une expression du polynôme de degré au plus n prenant les mêmes valeurs qu'une fonction donnée en n + 1 points deux à deux distincts donnés, puis à étudier l'erreur commise en cherchant à la minimiser .

Ce problème est bien facile à résoudre lorsque lorsque on dispose de deux points x_0 et x_1 et cherche un polynôme P de degré 1 car il suffit alors de choisir

l'unique polynôme dont le graphe est la droite $(M_0(x_0, f_1 = P(x_0))M_1(x_1, f_1 = P(x_1)))$ comme indiqué sur la figure 1.



En effet, posant $P(x) = \alpha x + \beta$, on détermine α et β grâce aux 'equations $P(x_0) = f_0$ et $P(x_1) = f_1$. On trouve

$$P(x) = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}(x - x_0) + f(x_0).$$

que l'on peut aussi écrire

$$P(x) = p(x_0)\frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + p(x_1)\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}.$$

Soit n un entier naturel puis $x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_n$, $n+1$ complexes deux à deux distincts.

On cherche $(n+1)$ polynômes $L_0, ..., L_n$, tous de degré au plus n, vérifiant les égalités :

$$\forall (i,j) \in [0,n]^2, \quad L_i(x_j) = \delta_{i,j}$$

Soit i un entier naturel élément de $[0,n]$ donné. Le polynôme L_i est de degré au plus n et admet les n complexes deux à deux distincts x_j, $j \neq i$, pour racines. Par suite, nécessairement, il existe une constante λ telle que $L_i(x) = \lambda \prod_{j=0,j\neq i}^{i=n}(x-x_j)$

L'égalité $L_i(x_i) = 1$ fournit alors $\lambda = \prod_{j=0,j\neq i}^{i=n}(x_i - x_j)$ Donc

$$L_i(x) = \frac{\prod_{j=0,j\neq i}^{i=n}(x-x_j)}{\prod_{j=0,j\neq i}^{i=n}(x_i-x_j)} = \frac{(x-x_0)(x-x_1)....(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})....(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1}).(x_i-x_n)}$$

Conséquences 1.1 *Le numerateur de chacun de ces polynômes est un produit de n termes $(x-x_k)$ et est donc un polynôme de degré n. Le dénominateur est une constante. On a donc*

1. L_i *est un polynôme de degré n*
2. $L_i(x_k) = 0$ si $i \neq k$ *et* $0 \leq k \leq n$
3. $l_i(x_i) = 1$.

Exemple 1.1 *Si* $x_0 = -1, \; x_1 = 0$ *et* $x_2 = 1$

$f(x_0) = 2, \; f(x_1) = 1$, $f(x_2) = -1$, *on obtient*

$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{x(x-1)}{(-1)(-1-1)} = \frac{x(x-1)}{2}$

$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{(x-(-1))(x-1)}{-(-1)(-1)} = \frac{(x+1)(x-1)}{-1}$

$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{(x+1)x}{(1-(-1))(1-0)} = \frac{(x+1)x}{2}$

Pour i fixé *il* existe un unique polynôme L_i vérifiant les trois propriétés précédentes.

Preuve. on en a déjà construit un qui convenait. Supposons qu' *il* y en a*it* deux L_i et G_i alors L_i - G_i est un polynôme de degré au plus n et ayant $n+1$ racines distinctes $x_0, \; \ldots, \; x_n$ c'est donc le polynôme nul.

Les polynômes $L_i(x)$ sont les polynômes de Lagrange de $\mathbb{C}_n[X]$ associés aux points $x_0, \; \ldots, \; x_n$.

Proposition 1.1 *Les polynômes* $L_0(x), \; L_1(x), ..., \; L_n(x)$ *forment une base de* $\mathbb{C}_n[X]$.

Preuve. *il* suffit de montrer que ce système de polynômes est libre, puisqu'il est formé de $n+1$ éléments d'un espace de dimension $n+1$. supposons qu'*il* existe $n+1$ réels $\alpha_0, \; \ldots, \; \alpha_n$ tels que, pour tout réel x

$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i L_i(x) = 0$ alors, pour $x = x_k$

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i L_i(x_k) = \alpha_k = 0.$$

On a prouvé le résultat.

1.2.2 Interpolation de Lagrange

Soit f une fonction donnée définie sur $\mathbb{C}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ et $A_n = \{x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_n\}$, $n+1$ réels donnés distincts.

Interpoler la fonction f par un polynôme de degré n aux points $x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_n$ consiste à résoudre le problème suivant

$$\begin{cases} \text{Trouver un polynôme } P \text{ de degré } \leq n \text{ tel que} \\ P(x_i) = f(x_i),\ 0 \leq i \leq n. \end{cases} \qquad (L_g)$$

Si un tel polynôme existe on la note $\mathrm{L}[A_n; f]$ ou tout simplement L, il s′écrit de manlère unique

$$\mathrm{L}[A_n; f](x) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i L_i(x)$$

car les L_i forment une base de $\mathbb{C}_n[X]$. En prenant $x = x_k$ pour $0 \leq k \leq n$ et en ut$i$lisant que $L_i(x_k) = 0$ si $k \neq i$ et $L_k(x_k) = 1$ on obtient

$$\alpha_k = L[A_n; f](x_k) = f(x_k).$$

Proposition 1.2 *L'unique solution du problème (L_g) est donc*

$$\mathrm{L}[A_n; f](x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) L_i(x).$$

Ce polynôme s'appelle l'interpolant de la fonction f de degré n aux points $x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_n$.

Exemple 1.2 *De l'exemple 1.1*

$$\begin{aligned}
\mathrm{L}[A_2; f](x) &= L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) + L_2(x)f(x_2) \\
&= \frac{x(x-1)}{2}f(x_0) + \frac{(x+1)(x-1)}{-1}f(x_1) + \frac{(x+1)x}{2}f(x_2) \\
&= 2\frac{x(x-1)}{2} + \frac{(x+1)(x-1)}{-1} - \frac{(x+1)x}{2} \\
&= -\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 1
\end{aligned}$$

On vérifie facilement que:

$\mathrm{L}[A_2; f](x_0) = \mathrm{L}[A_2; f](-1) = \frac{(-)(-1-1)}{2} = 2 = f(x_0)$

$\mathrm{L}[A_2; f](x_1) = \mathrm{L}[A_2; f](0) = \frac{(1)(-1)}{-1} = 1 = f(x_1)$

$\mathrm{L}[A_2; f](x_2) = \mathrm{L}[A_2; f](1) = -\frac{(1+1)1}{2} = -1 = f(x_2)$

Remarque 1.1
1. *Le polynôme d'interpolation de Lagrange aux points $x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_n$ d'un polynôme de degré $\leq n$ est lui-même.*

2. *Si l'on prend pour f le polynôme constant égal à 1 d'après la remarque précédente f est égale à son interpolant et on obtient*
$$\sum_{i=0}^{n} L_i(x) = 1.$$

Proposition 1.3 *L'application qui à f définie (au moins) sur $A_n = \{a_0,\ \ldots, a_n\}$ fait correspondre $\mathrm{L}[A_n; f] \in \mathbb{C}_n[X]$ est une application lineaire cela signifie qu'elle satisfait les deux propriétés suivantes*

$$\begin{cases} \mathrm{L}[\mathrm{A}_n; f+g] &= \mathrm{L}[\mathrm{A}_n; f] + \mathrm{L}[\mathrm{A}_n; g] \\ \mathrm{L}[\mathrm{A}_n; \lambda f] &= \lambda \mathrm{L}[\mathrm{A}_n; f] \end{cases}$$

1.2.3 Algorithme basé sur la Formule d'interpolation de Lagrange

Les données de l'algoritlme sont

1. *le vecteur $A_n = \{x_0, ..., x_n\}$ formé des points d'interpolation,*
2. *le vecteur $f = (f_0,\ \ldots, f_n)$ formé des valeurs d'interpolations*
3. *le point t en lequel on veut calculer $P := \mathrm{L}[A_n; f]$.*

Le résultat est dans P.

i) $P := 0$

ii) *Pour* $i \in [0 : n]$ *faire*

a) $L := 1$

b) Pour $j \in [0 : i-1; i+1 : n]$ $L := L.\frac{(t-x_j)}{(x_j-x_j)}$

c) $P := P + L.f_i$

Une procedure Maple pur déterminer l'interpolant

```
Lagrange := proc (x::list, y::list, t::name)
local k, L, n, P, Q; P := 0;
n := nops(x);
for k to n do;
Q := simplify((product(t-x[i], i = 1 .. n))/(t-x[k]));
L[k] := Q/subs(t=x[k], Q);
P := P+y[k]*L[k]
end do;
expand(P):
end proc;
```

1.3 Majoration de l'erreur

Le but de l'interpolation est de remplacer une fonction f plus ou moins compliquée par une fonction plus simple car polynômiale mais pour justifier cet échange nous faut une estimation de l'erreur commise. On rappelle le théorème de Rolle:

Théorème 1.1 *(Théorème de Rolle)*

Soit $f : [a,\ b] \to \mathbb{R}$ une appli|cation continue sur $[a,\ b]$ et dérivable sur $]\ a,\ b[$ telle que $f(a) = f(b)$, alors il existe $c \in]\ a,\ b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Avant de donner une estimation de l'erreur nous allons démontrer le lemme suivant

Lemme 1.1 *Soit* $f : [a,\ b] \to \mathbb{R}$ *dérivable sur* $[a,\ b]$ *alors Si* f *possède au moins* $n+2$ *zéros distincts sur* $[a,\ b]$, f' *possède au moins* $n+1$ *zéros distincts sur* $[a,\ b]$.

Preuve. Il suffit d'appliquer le théorème de Rolle entre deux zéros consécutifs de f

Corollaire 1.1 *Soit* $f \in C^{n+1}([a,\ b])$. Si f *possède au moins* $n+2$ *zéros distincts sur* $[a,\ b]$, *alors* $f^{(n+1)}$ *a au* moins *un zéro sur* $[a,\ b]$.

Preuve. Il suffit de faire une récurrence en appliquant le lemme précédent.

Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle $[a,\ b]$ et soit $a \leq x_0 < \ldots < x_n \leq b$, $n+1$ points de $[a,\ b]$, on note $A_n = \{x_0, ..., x_n\}$. On suppose $f \in C^{n+1}([a,\ b]$, alors

$$\forall x \in [a,\ b],\ \exists \xi \in [a,\ b],\ f(x) - \mathrm{L}[A_n; f](x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi).$$

Preuve. Si $x = x_i$ alors la relation est vérifiée.

Soit $x \in [a,\ b]$ fixé x différent de tous les x_i. Posons $q(x) = (x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)$ et

$$W(t) = f(t) - \mathrm{L}[A_n; f](t) - \frac{q(t)}{q(x)}(f(x) - \mathrm{L}[A_n; f](x)).$$

La fonction W est de classe C^{n+1} comme f et s'annule pour $t = x,\ x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_n$ elle admet donc au moins $n+2$ zéros. D'après le corollaire *il* existe au moins un nombre $\xi \in [a,\ b]$ tel que $W^{(n+1)}(\xi) = 0$. On en déduit la relation. Le point ξ étant inconnu, on cherche une majoration et on a le corollaire immédiat:

Corollaire 1.2 *Si* $f^{(n+1)}$ *est continue sur* $[a,\ b]$, *alors*

$\forall x \in [a,\ b],\ |f(x) - \mathrm{L}[A_n; f](x)| \leq \frac{|(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)|}{(n+1)!}\ sup_{x\in[a,b]}|f^{(n+1)}(x)|.$

1.4 Polynômes de Chebychev

1.4.1 Préliminaire

Il est naturel de penser que plus on augmente le nombre de points d'interpolation, meilleure est la précision de l'approximation fournie par le polynôme d'interpolation. Pourtant, si cette idée reste correcte pour une classe importante de fonctions et pour des points d'interpolation correctement choisis, elle est fausse dans le cas général. L'exemple le plus classique a été donné par le mathématicien Runge qui a montré en 1901 que les polynômes d'interpolation aux points équidistants de la fonction f définit par $f(x) = 1/(1+x^2)$ donnaient des résultats très mauvais.

> restart; with(Student[NumericalAnalysis]);

> $f := x- > 1/(1+25*x^2):$

> $xy := [[-.2, f(-.2)], [-4, f(-4)], [-6, f(-6)], [.2, f(.2)], [2, f(2)], [6, f(6)], [7, f(7)]];$

> $xy1 := [[-.2, f(-.2)], [-4, f(-4)], [-7, f(-7)], [-1, f(-1)], [-3, f(-3)], [-5, f(-5)]],$
$[[1, f(1)], [3, f(3)], [5, f(5)], [.2, f(.2)], [4, f(4)], [6, f(6)], [7, f(7)]];$

> $p1a := PolynomialInterpolation(xy, function = 1/(1+25*x^2), method = lagrange);$

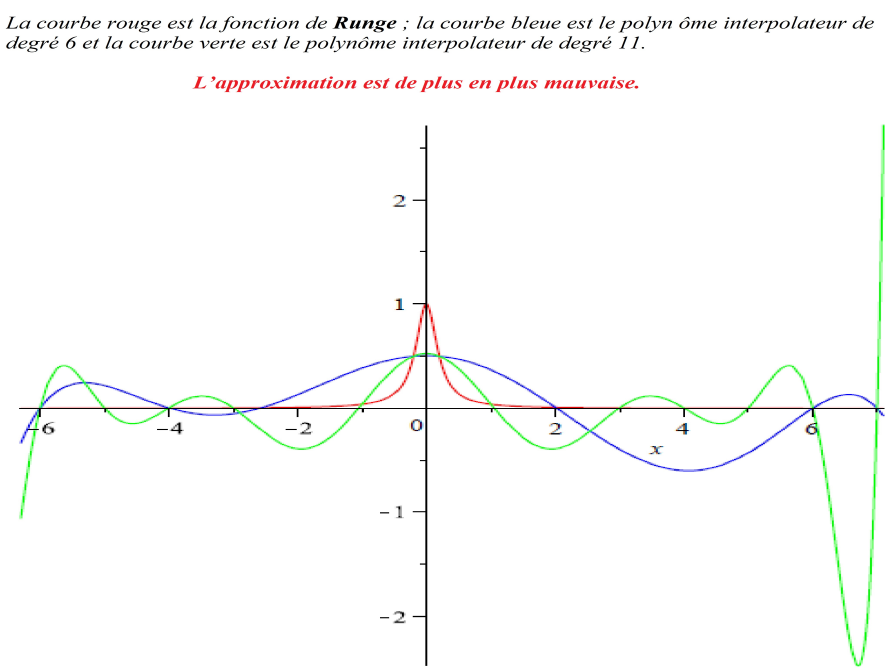
> $p1b := PolynomialInterpolation(xy1, function = 1/(1+25*x^2), method = lagrange);$

> L1:=expand(Interpolant(p1a));

> L2:=expand(Interpolant(p1b));

> $plot(1/(1+25*x^2), x = -8..8);$

> $plot([1/(1+25*x^2), L1, L2], x = -6.3..7.1, color = [red, blue, green]);$



La courbe rouge est la fonction de **Runge**; la courbe bleue est le polynôme interpolateur de degré

6 et la courbe verte est le polynôme interpolateur de degré 11. L'approximation est de plus en plus mauvaise.

1.4.2 Choix des points d'interpolation

D'après le corollaire 10 pour obtenir la meilleure estimation possible pour une fonction f donnée *il* faut choisir les $n+1$ points d'interpolation $x_0, \ \ldots, \ x_n$ de manière à minimiser le maximum sur $[a, \ b]$ de la fonction $|(x-x_0)\ldots(x-x_n)|$. S*i* on appelle $\mathbb{R}_{n+1}([a, \ b])$ l'ensemble des polynômes de degré $n+1$ unitaires à valeurs de $[a,b]$, le meilleur choix des x_i est donné par le polynôme $Q \in \mathbb{R}_{n+1}([a, \ b])$ tel Que

$$\forall P \in E_{n+1}([a, \ b]), \ \sup_{x\in[a,b]} |Q(x)| \leq \sup_{x\in[a,b]} |P(x)|.$$

I1 faudra de plus s'assurer que le polynôme Q trouvé admet bien $n+1$ racines distinctes sur l'intervalle $[a, \ b]$. On va montrer l'existence de ce polynôme qu'on appellera polynôme de Chebychev normalisé.

Remarque 1.2 *En faisant le changement de variable*

$$t = \frac{2}{b-a}x - \frac{b+a}{b-a} \Leftrightarrow x = \frac{b-a}{2}t + \frac{b+a}{2}$$

on peut toujours se ramener à une étude sur l'intervalle $[-1,1]$.

On appelle polynôme de Chebychev de degré n le polynôme T_n défini sur $[-1,1]$ par

$$T_n(x) = \cos(nArccos(x)).$$

La formule donnée dans le théorème ne fait pas apparaître de manière évidente un polynôme. Cependant, on peut tout de suite noter que, pour tout $x \in [-1,1]$, $T_n(x) \in [-1,1]$.

Considérons la formule de Moivre : $(\cos\theta + isin\theta)^n = \cos n\theta + isinn\theta$. Pour $\theta \in [0, \ \pi]$ posons $x = \cos\theta$; alors $sin\theta = \sqrt{1-x^2}$. On en déduit que

$$\cos n\theta = \cos \left(\ nArccos(x)\right) = \sum_{i=0}^{[n/2]} C_n^{2i}(-1)^i x^{n-2i}(1-x^2)^i.$$

En particulier T_n est un polynôme de degré n.

Exemple 1.3

$$T_0(x) = 1$$

$$T_1(x) = x$$

$$T_2(x) = 2x^2 - 1$$

Les formules d'addition des fonctions trigonométriques donnent

$$\cos(n+1)\theta + \cos(n-1)\theta = 2\cos\theta\cos n\theta.$$

On en déduit immédiatement que les polynômes de Chebyshev vérifient la relation de récurrence

$$T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2xT_n(x).$$

Le coefficient dominant est 2^{n-1}.

En effet: le coefficient s'obtient par récurrence.

T_n a des zéros simples aux n points

$$x_k = \cos(\frac{2k-1}{2n}\pi),\ \ k = 1, 2,\ \ \ldots,\ \ n.$$

T_n atteint son extremum sur l'intervalle [-1, 1] aux $n+1$ points

$$x'_k = \cos(\frac{k}{n}\pi),\ \ k = 0, 1,\ \ \ldots,\ \ n$$

pour lesquels il prend alternativement les valeurs 1 et -l.

Preuve. Calculons $T_n(x_k)$.

$$T_n(x_k) = \cos(n\mathrm{Arc}\cos(\cos\tfrac{2k-1}{2n}\pi)) = \cos(\tfrac{2k-1}{2}\pi) = 0 \text{ car } \tfrac{2k-1}{2n}\pi \in [0,\ \pi].$$

On a donc trouvé n racines distinctes, or T_n est un polynôme de degré n. on les a donc toutes.

On montre de même $T_n(x'_k) = (-1)^k$.

On appelle polynôme normalisé de Chebychev le polynôme $\overline{T}_n$ défini par $\overline{T}_n = \frac{1}{2^{n-1}}T_n$.

1.4.3 Majoration de l'erreur avec les polynômes de Chebychev

On va montrer que ce polynôme $\overline{T}_n$ est le polynôme que l'on cherchait.

Pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_n([-1,1])|$ on a

$$\frac{1}{2^{n-1}} = \sup_{x\in[-1,1]}|\overline{T}_n(x)| \leq \sup_{x\in[-1,1]}|P(x)|.$$

Preuve. Supposons qu'il existe $P \in \mathbb{R}_n([-1,\ 1])$ tel que

$$\sup_{x\in[-1,1]}|P(x)| < 1/2^{n-1}.$$

Considérons le polynôme $\overline{T}_n - P$. C'est un polynôme de degré $\leq n-1$. De plus,

$$r(x'_k) = \overline{T}_n(x'_k) - P(x'_k) = \frac{(-1)^k}{2^{n-1}} - P(x'_k)$$

pour $k = 0,\ \ldots,\ n$. Cette quantité prend alternativement le signe + ou -. On en déduit que r a au moins n racines, or c'est un polynôme de degré inférieur ou égal à $n-1$, donc $r = 0$. On obt$i$ent $\overline{T}_n = P$. Contradiction.

En utilisant le changement de variable définie plus haut, on a donc montré le théorème

Sur l'intervalle $[a,\ b]$, en choisissant les points d'interpolation

$$x_k = \tfrac{a+b}{2} + \tfrac{b-a}{2}\cos\tfrac{2k+1}{2(n+1)}\pi \text{ pour } k = 0,\ \ldots,\ n$$

on obtient la majoration suivante:

$$|f(x) - P(x)| \leq \tfrac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!2^{2n+1}} \sup_{x\in[a,b]}|f^{(n+1)}(x)|.$$

C'est la meilleure majoration globale que l'on puisse obtenir.

Remarque 1.3 *La formule de Taylor-Lagrange montre que,* si *l'on approche la fonction f par la* fonction *polynômiale*

$$P_f\ :\ x \to f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n,$$

on a alors

$|f(x) - P_f(x)| \leq \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}\ sup_{x\in[a,b]}|f^{(n+1)}(x)|.$

Cette estimation montre la supériorité de la méthode de Chebychev.

1.5 Application à la méthode des trapèzes pour le calcul approché des intégrales

L'une des applications les plus fameuses de l'extrapolation de Richardson est la méthode d'intégration de Romberg. Elle s'agit d'une méthode récursive de calcul numérique d'intégrales.

Cette technique d'accélération permet d'améliorer l'ordre de convergence de la méthode des trapèzes,en appliquant cette dernière à des divisions successives de l'intervalle d'étude et en formant des combinaisons judicieuses.

1.5.1 Principe du méthode

Principe : On remplace la courbe représentative de f, sur chaque segment de la subdivision par le segment qui joint $(x_i, f(x_i))$ à $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$. Cela revient donc à interpoler la fonction f sur le segment $[x_i, x_{z+1}]$ par le polynôme de Lagrange de degré 1 aux points x_i et x_{i+1}.

Proposition 1.4 *La valeur approchée de l'*intégrale *de f sur I par la méthode des trapèzes est alors donnée par*

$$T_n(h) = \frac{b-a}{n}\ (\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_{\text{i}})$$

Preuve. l'aire du trapèze de base $[x_i,\ x_{i+1}]$ est

$$(x_{i+1} - x_i)(f(x_i) + f(x_{i+1}))/2 = h(f(x_i) + f(x_{i+1}))/2.$$

On en déduit que

$$T_n(h) = \sum_{i=0}^{n-1} h(f(x_i) + f(x_{i+1}))/2 = h(\frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_t))$$

1.5.2 Evaluation de l'erreur

Proposition 1.5 *Si f est de classe C^2 sur I_l alors on* a*, pour tout entier naturel n non nul*

$$|T_n(h) - \int_a^b f(t)dt| \le (b-a)^3 \frac{M_2}{12n^2}.$$

On en deduit *que $(T_n(h))$ converge vers $\int_a^b f(t)dt$.*

Preuve. cette méthode consiste à remplacer f sur le segment $[x_i,\ x_{i+1}]$ par son polynôme d'interpolation P_i de Lagrange de degré 1 ayant les mêmes valeurs que f aux bornes de l'intervalle. D'après le théorème, comme f est de classe C^2, on a

$$\forall x \in\ [x_i,\ x_{i+1}],\ f(t)\ - P_i(t)\ = (t - x_{i+1})(t - x_i)\frac{f''(\xi)}{2}.$$

On en déduit que:

$$|\int_{x_i}^{x_{t+1}} (f(t)\ - P_i(t))dt| \le \int_{x_l}^{x_{i+1}} (x_{i+1} - t)(t - x_i)\frac{\|f"\|_\infty}{2} dt$$

Or $\int_{x_l}^{x_{i+1}} (x_{i+1} - t)(t - x_i)dt = \frac{1}{6}(x_{i+1} - x_i)^3$ Pour conclure:

$$|T_n(h) - \int_a^b f(t)dt|\ = |\sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_l}^{x_{i+1}} (P_i(t) - f(t))dt| \le \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} |P_i(t) - f(t)|dt$$

$$\le \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\|f"\|_\infty h^3}{12} = n\frac{\|f"\|_\infty h^3}{12} = (b-a)^3 \frac{\|f"\|_\infty}{12n^2}.$$

1.5.3 Principe d'accélération de Richardson-Romberg

Admettons le théorème suivant:

Théorème 1.2 *(Euler-Maclaurin)*

Si f est de classe C^{2k} et si $T(h)$ désigne approximation de $I = \int_a^b f(t)dt$ par la méthode des trapèzes pour un pas égal à $h = \dfrac{b-a}{n}$, alors on dispose du développement limité suivant:

$$T(h) = I \ + a_1 h^2 + a_2 h^4 + \cdots + a_{k-1} h^{2k-2} + O(h^{2k}).$$

où les coefficients $a_i,\ i = 1,\ \cdots,\ k-1$ ne dépendent ni de h ni de n.

▷ **Étape 1:** on a:

$$T_n(h) = I + a_1 h^2 + O(h^4) \ \ et \ \ T_n(h/2) = I \ + a_1 \frac{h^2}{4} + O(h^4)$$

d'où,

$$T_n^{(1)} = \frac{4T_n(h/2) - T_n(h)}{3} = I \ + O(h^4).$$

Alors que l'erreur d'approximation de I par $T_n(h)$ est un $O(h^2)$, on constate que l'erreur d'approximation de I par $\frac{4T_n(h/2)-T_n(h)}{3}$ est un $o(h^4)$: La précision se trouve augmentée.

Cette première observation montre que la méthode est convaincante. Rien n'interdit de poursuive cette idée. On introduit désormais les notations suivantes:

Pour tout entier $n > 0,$ on pose : $T_n^{(0)} = T_n(\frac{b-a}{n})$ (méthode des trapèzes).

▷ **Étape k:**

Pour tout entier $n \geq 1$ et $k \geq 1,$ on pose

$$T_n^{(k)} = \frac{4^k T_n^{(k-1)}(\frac{h}{2}) - T_n^{(k-1)}(h)}{4^k - 1}$$

(La première *approximation* (k=1) correspond exactement à la la méthode de **Simpson**).

1.5.4 Approximation du nombre π

Considérons l'intégrale définie par $I = \int_0^1 \frac{4}{t^2+1} dt$. La valeur de I donne exactement π.

Pour approcher ce fameux nombre de mathématiques, on calcule une approximation de I avec la méthode des trapèzes et ceci pour différentes valeurs de h, ce qui fournit les valeurs de la suite $(S_n)_n$ et en appliquant l'extrapolation de Richardson, on obtient les nouvelles suites $(T_n^{(k)})$ avec $k = 0, 3, 5, 7, 9, 11$.

Le tableau suivant présente les premières valeurs de l'erreur des suites $(T_n^{(k)})_k$

n	$\|S_n - S\|$	$\|T_n^{(3)} - S\|$	$\|T_n^{(5)} - S\|$	$\|T_n^{(7)} - S\|$	$\|T_n^{(9)} - S\|$	$\|T_n^{(11)} - S\|$
1	$3.5\ 10^{-4}$	$4.46\ 10^{-5}$	$5.57\ 10^{-6}$	$2.78\ 10^{-6}$	$6.97\ 10^{-7}$	$1.74\ 10^{-7}$
2	$1.7\ 10^{-4}$	$2.23\ 10^{-5}$	$2.78\ 10^{-6}$	$1.39\ 10^{-6}$	$3.48\ 10^{-7}$	•
3	$8.9\ 10^{-5}$	$1.11\ 10^{-5}$	$1.39\ 10^{-6}$	$6.97\ 10^{-7}$	•	•
4	$4.44\ 10^{-5}$	$5.57\ 10^{-6}$	$6.97\ 10^{-7}$	$3.48\ 10^{-7}$	•	•
5	$2.23\ 10^{-5}$	$2.78\ 10^{-6}$	$3.48\ 10^{-7}$	•	•	•
6	$1.11\ 10^{-6}$	$1.39\ 10^{-6}$	$1.74\ 10^{-7}$	•	•	•
7	$5.57\ 10^{-6}$	$6.97\ 10^{-7}$	•	•	•	•
8	$2.78\ 10^{-6}$	$3.48\ 10^{-7}$	•	•	•	•
9	$1.39\ 10^{-6}$	•	•	•	•	•
10	$6.97\ 10^{-7}$	•	•	•	•	•

Tableau des erreurs de quelques suites générées par l'extrapolation de Richardson

Commentaire: Pour atteindre la précision 10^{-7}, i1 a fallut itérer la suite $(S_n)_n$ 10 fois, 6 fois pour la suite (T_3) par contre une seule itération suffit pour arriver à la même précision en utilisant la suite (T_{11})