Contents

1 SERIES ENTIERS- RAPPELS ET COMPLEMENTS **3**

1.1 Rayon de convergence . . . 3

1.2 CRITERES DE DETERMINATION DU RAYON DE CONVERGENCE. . . . 4

1.3 OPERATIONS ALGEBRIQUES SUR LES SERIES ENTIERS. . . . 5

1.3.1 somme . . . 5

1.3.2 produit par un scalaire . . . 5

1.3.3 produit de Cauchy . . . 5

1.4 RÉGULARITÉ DE LA SOMME D'UNE SÈRIE ENTIÉRE . . . 5

1.4.1 Généralités. . . . 5

1.4.2 Continuité d'une série entière . . . 5

1.4.3 Différentiabilité d'une série entière . . . 6

1.4.4 Intégration terme à terme: Cas réel. . . . 6

1.4.5 Conséquences : . . . 6

1.5 DVELOPEMENT EN SERIE ENTIERE. . . . 7

1.5.1 Cas complexe . . . 7

1.5.2 Cas réel . . . 7

Chapter 1: SERIES ENTIERS- RAPPELS ET COMPLEMENTS

1.1 Rayon de convergence

Définition 1.1 *(série entière)*

On appelle *série entière* toute série de fonctions $\sum u_n$ pour laquelle il existe une suite (a_n) de nombres complexes telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \forall z \in \mathbb{C}\ u_n(z) = a_n z^n$$

Une telle série entière est notée abusivement $\sum a_n z^n$, appelée *série entière de la variable complexe z* ; les a_n sont *les coefficients* de la série entière.

- La somme $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ est ambiguë quand z = 0 et doit être comprise ainsi : $f(0) = a_0 + 0 + 0 + ... = a_0$.

Théorème et définition 1.1

(Rayon de convergence) soit $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$; il existe un unique $R \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ tel que

$$\begin{cases} \text{si } |z| < R \text{ alors la série numérique } \sum a_n z^n \text{ converge absolument} \\ \text{si } |z| > R \text{ alors la série numérique } \sum a_n z^n \text{ diverge grossièrement} \end{cases}$$

1. R est donné par : $R = \sup\{r \in \mathbb{R}^+ / (a_n r^n) \text{ bornée dans } \mathbb{R}\}$ (dans $\overline{\mathbb{R}}$)
2. R est appelé *le rayon de convergence* de la série entière $\sum a_n z^n$;
3. $D_R = \{z \in \mathbb{C} / \ |z| < R\}$ est *le disque (ouvert) de convergence* de la série entière $\sum a_n z^n$.

Preuve. On commence par montrer le lemme suivant

Lemme 1.1 *soit $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$; si $\rho \in \mathbb{R}^{+*}$ est tel que la suite $(a_n \rho^n)$ soit bornée, alors pour tout complexe z tel que $|z| < \rho$, la série numérique $\sum a_n z^n$ converge absolument.*

En effet
Supposons : $\forall n \in \mathbb{N} |a_n \rho^n| \leq M$ et $|z| < \rho$; alors

$$\forall n \in \mathbb{N} |a_n z^n| = |a_n \rho^n| (\tfrac{|z|}{\rho})^n \leq M.(\tfrac{|z|}{\rho})^n \text{ et } \tfrac{|z|}{\rho} < 1$$

d'où le résultat (majoration par une série géométrique convergente).
Dém. *du* **théorème :**

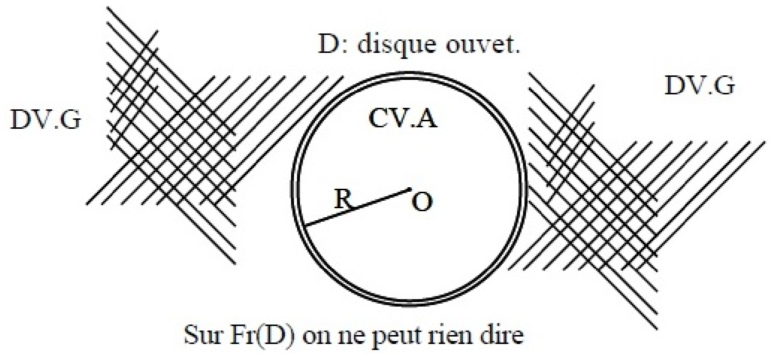


Figure 1.1: Zone de convergence d'une SE

Existence : soit $\mathcal{E} = \{r \in \mathbb{R}^+/(a_n r^n) \text{ bornée dans } \mathbb{C}\}$; $\mathcal{E}$ est une partie non vide de $\mathbb{R}^+(0 \in \mathcal{E})$, soit donc R la borne supérieure de $\mathcal{E}$ dans $\overline{\mathbb{R}}$: $R \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ et, pour $z \in \mathbb{C}$:

$*$ si $|z| < R$, alors je dispose de $r \in \mathcal{E}$ tel que $|z| < r$ (car $|z|$ n'est pas un majorant de $\mathcal{E}$!) et le lemme d'Abel montre que $\sum a_n z^n$ est absolument convergente ;

$*$ si $|z| > R$, alors $|z| \notin \mathcal{E}$, donc la suite $(a_n z^n)$ n'est pas bornée, d'où la divergence grossière de la série numérique $\sum a_n z^n$.

Unicité : si R et R' étaient deux valeurs distinctes de $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ vérifiant les conditions, je pourrais supposer $R < R'$ et considérer un complexe z tel que $R < |z| < R'$ pour obtenir une contradiction.

Exemple 1.1 $\sum z^n$, $\sum z^n/n$, $\sum z^n/n^2$, $\sum z^n/n!$, $\sum n! z^n$

1.2 CRITERES DE DETERMINATION DU RAYON DE CONVERGENCE.

1. **Si** l'on trouve R tel que : $|z| < R \Rightarrow \sum a_n z^n$ CVA, alors le RCV de $\sum a_n z^n$ est au moins égal à R; si l'on trouve en outre z de module R tel que $\sum a_n z^n$ ne soit pas absolument convergente, alors R est le RCV de $\sum a_n z^n$;

2. **Si** $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ sont deux séries entières et R_a, R_b leurs rayons de convergence respectifs ; $*$ si $a_n = O(|b_n|)$ (*resp.* $|a_n| \leq |b_n|$ à partir d'un certain rang), alors $R_a \geq R_b$;

3. **Si** $|a_n| \sim |b_n|$, alors $R_a = R_b$;

4. Règle de D'Alembert: $R = lim_{n\to+\infty} \frac{1}{|\frac{a_{n+1}}{a_n}|}$, avec la convention $R = 0$ si $lim_{n\to+\infty} | \frac{a_{n+1}}{a_n} | = +\infty$ et $R = +\infty$ si $lim_{n\to+\infty} | \frac{a_{n+1}}{a_n} | = 0$

5. Règle de Cauchy : $R = \frac{1}{lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$, avec la convention $R = 0$ si $lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{| a_n |} = +\infty$ et $R = +\infty$ si $lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{| a_n |} = 0$

Exemple 1.2 *le RCV de* $\sum_{n\geq1} n^\alpha z^n$; $\sum_{n\geq0} \sin(n) z^n$; $\sum_{n\geq1} \sin(\frac{1}{n}) z^n$; $\sum_{n\geq0} \frac{z^{3n+1}}{2^n}$ *et de* $\sum_{n\geq0} \int_0^1 \frac{e^{nt}}{1+t} \mathrm{d}t \; z^n$

1.3 OPERATIONS ALGEBRIQUES SUR LES SERIES ENTIERS.

1.3.1 somme

Soient R_a , R_b , R_{a+b} les RCV respectifs de $\sum a_n z^n$, $\sum b_n z^n$,$\sum(a_n + b_n)z^n$; alors $R_{a+b} \geq \min(R_a,\ R_b)$ (avec égalité si $R_a \neq R_b$).

1.3.2 produit par un scalaire

Si $\lambda \neq 0, \sum \lambda a_n z^n$ a même RCV que $\sum a_n z^n$.

1.3.3 produit de Cauchy

(H.P.) Soient R_a , R_b , R les RCV respectifs de $\sum_{n\geq 0} a_n z^n, \sum_{n\geq 0} b_n z^n, \sum_{n\geq 0} c_n z^n$ où : $\forall n \in \mathbb{N}$ $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$, (tous les indices partent de 0). Alors pour $|z| < \min(R_a,\ R_b)$, on a $\sum c_n z^n$ absolument convergente et : $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = (\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n)(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n)$ en particulier, le RCV de $\sum c_n z^n$ est au moins égal à $\min(R_a,\ R_b)$.

1.4 RÉGULARITÉ DE LA SOMME D'UNE SÈRIE ENTIÉRE

1.4.1 Généralités.

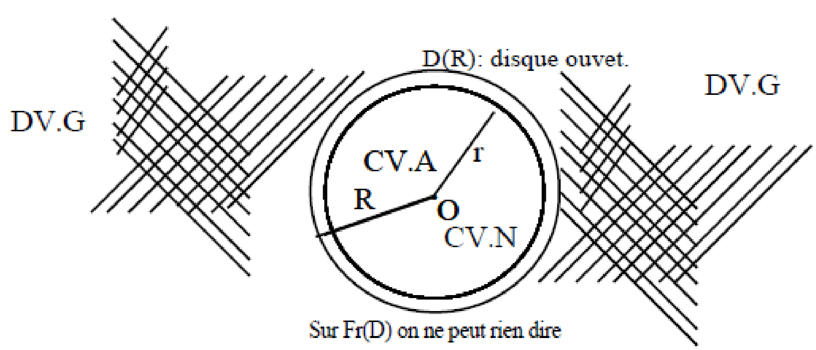
Si R est le RCV de $\sum a_n z^n$, alors.

- La série numérique $\sum a_n z^n$ est absolument convergente pour $|x| < R$, divergente grossièrement pour $|x| > R$.
- la série de fonctions $\sum a_n z^n$ converge normalement sur $D(0, r)$, pour $0 < r < R$;
- la fonction somme $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ est continue sur $D(0, r)$

1.4.2 Continuité d'une série entière

Théorème 1.1 *()*

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R *Alors, pour tout $r <$* R *cette série converge normalement sur le disque fermé de rayon r donc uniformement. Soit $f(z)$ la somme de la série entière, Alors f est continue sur* D(R) .



1.4.3 Différentiabilité d'une série entière

Théorème 1.2 *()*

Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ pour $|z - z_0| < R$, où $R > 0$ et $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ est une série entière dont le rayon de convergence est R. Alors la fonction $f(z)$ est analytique (et donc différentiable) sur le disque $|z - z_0| < R$, et

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n\ a_n(z - z_0)^{n-1}$$

où la série entière $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(z - z_0)^{n-1}$ a pour rayon de convergence R.

Remarque 1.1 *En d'autres termes, on peut obtenir la dérivée de la fonction $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ en différentiant la série terme à terme, et la série dérivée a le même rayon de convergence que la série originale.*

Corollaire 1.1 *Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ pour $|z - z_0| < R$, où $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ est une série entière dont le rayon de convergence est R. Alors la fonc- tion $f(z)$ possède des dérivées de tous ordres et ces dérivées peuvent être obtenues en diffé- rentiant la série terme à terme. Les séries dérivées ont toutes le même rayon de convergence R et*

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!},\ n\ = 0, 1, 2,\ \ldots$$

où $f^{(n)}(z)$ est la dérivée d'ordre n de $f(z)$.

Théorème 1.3 *(Unicité du DSE)*

Si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z\ - z_0)^n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z\ - z_0)^n$ sont deux séries entières convergentes pour $|z - z_0| < R$, où $R > 0$, et si les limites de ces séries coincident pour tout z dans le cercle $|z - z_0| < R$, alors

$$a_n = b_n,\ \forall n.$$

1.4.4 Intégration terme à terme: Cas réel.

Théorème 1.4 *()*

soit $\sum a_n x^n$ une série entière de RCV $R > 0$; on a

$$\forall x \in]-R,\ R[,\ \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right) \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1}\ ;$$
$$si\ f\prime(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \text{ alors } f(x) = f(0) + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

la série entière $\sum a_n \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1}$ a aussi R pour RCV.

Exemple 1.3 *Développement en série entière de* $\ln(1 + x)$ *, de* $\arctan x$.

1.4.5 Conséquences :

1. si les sommes de deux séries entières coincident sur un intervalle de la forme $]-\delta, \delta[$ alors ces deux séries entières ont les mêmes coefficients ;

2. la fonction somme d'une série entière est paire (*resp.* impaire) si et seulement si tous les coefficients de rang impair (*resp.* pair) sont nuls.

Exercice 1.1 *pour* $|z| < 1$ *et* $k \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{(1-z)^{k+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \begin{pmatrix} n+k \\ k \end{pmatrix} . z^n$.

1.5 DVELOPEMENT EN SERIE ENTIERE.

1.5.1 Cas complexe

Théorème et définition 1.2 *(Série de Taylor dans* $\mathbb{C}$.*)*

Soit f une fonction analytique (differentiable) en tout point du disque ouvert

$$D = \{y \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}, \text{ où } z_0 \in \mathbb{C} \text{ et } 0 < R \leq \infty.$$

Alors il existe une suite unique $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ dans $\mathbb{C}$ telle que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \ (z - z_0)^n, \ \forall z \in D.$$

De plus,

$$a_n = f^{(n)}(z_0)/n! \ , \ n = 0, 1, 2, \ \ldots$$

Corollaire 1.2 *Équivalence entre le caractère analytique d'une fonction et l'existence d'une série de Taylor. Soit* $D = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$ *où* $z_0 \in \mathbb{C}$ *et* $0 < R \leq \infty$. *Alors une fonction* f *est analytique sur le domaine* D *ssi il existe une suite* $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *unique dans* $\mathbb{C}$ *telle que*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n, \ \forall z \in D.$$

Exemple 1.4 1. *pour tout* z *dans* $\mathbb{C}$ *(RCV* $+\infty$*) :*

- *On pose par définition* $e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ *; on déduit alors*
- $ch\ z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$ *;*
- $sh\ z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$ *;*
- $\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$ *;*
- $\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$*;*

2. *Pour* $|z| < 1$ *(RCV* $= 1$*) :* $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$.

1.5.2 Cas réel

Théorème et définition 1.3 *()*

Une fonction f est dite *développable en série entière en* 0 si et seulement s'il existe une série entière $\sum a_n z^n$ de RCV $R > 0$ et $\delta > 0$ tels que

$$\forall x \in]-\delta, \delta[; \ f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Théorème et définition 1.4 *()*

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, *la fonction* $x \mapsto (1+x)^\alpha$ est *la somme de la série en tière* $1 + \sum_{n\geq 1} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$, *de rayon de convergence* $+\infty$ *si* $\alpha \in \mathbb{N}$, 1 *sinon* :

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n \ \textit{ponr}\ x \in \begin{cases} \mathbb{R} & \textit{si } \alpha \in \mathbb{N} \\ ]-1,1[& \textit{sinon.} \end{cases}$$

Questions :

1. *Que se passe-t-il de particulier si* $\alpha \in \mathbb{N}$?
2. *Vériffier que le rayon de convergence est bien celui annoncé.*

Théorème et définition 1.5 *()*

La *fonction* Arctan: *pour tout* $x \in]-1,1[$, Arctan $x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$

Remarque 1.2 *1. (pour un DSE en* z_0, *considérer la fonction* $h \mapsto f(z_0+h)$*).*

2. Si f *est développable en série entière en* 0, *alors il existe* $\delta > 0$ *tel que* f *soit de classe* C^∞sur $]-\delta, \delta[$ *et l'on a:*

$\forall x \in]-\delta, \ \delta[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$

(f *est la somme de sa série de* ***Taylor****, dite aussi série de* ***Mac-Laurin****).*

3. Soit f *une fonction de classe* C^∞ *sur un voisinage ouvert* I *de* 0 *et à valeurs complexes. Alors* f *est développable en série entière au voisinage de* 0 *si, et seulementsi, Il existe un réel* $\delta > 0$ *tel que* $]-\delta, \delta[\subset I$ *et pour tout* $x \in]-\delta, \delta[$ *la suite* $(R_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par:* $R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$ *converge vers* 0 *sur* $]-r, r[$.