Chapitre 4 Puissance énergie cinétique et mécanique et travail.

I) Puissance

Soit Σ = un système en mvt / R ou R'

a) R galiléen

i) Σ = pt matériel

$$P = \vec{F}_{\substack{\text{resultante}\\ \text{réel}}} \cdot \vec{V}(M/R) = \sum_i (\vec{f}_{i\,ext} \cdot \vec{V}(M/R))$$

ii) Σ = système discret de N pts matériels

$$P(\vec{F}_{resultante}) = \sum_i (\vec{f}_{i\,ext} \cdot \vec{V}(M_i/R)) + \sum_i \sum_{j \neq i} \vec{f}_{j \to i} \cdot \vec{V}(M_i/R)$$

iii) Σ = système continu = solide

$$P(F_{resultant}) = \sum_i \vec{f}_{i\,\substack{ext\\ localisé}} \cdot \vec{V}(M_i/R) + \int \vec{f}(M) \cdot \vec{V}(M \in S/R)\, dm.$$

Si un solide est soumis uniquement à des forces réparties :

$$P(\vec{F}_{repartie}) = \int \vec{V}(M \in S/R) \cdot d\vec{F} \quad \text{avec } d\vec{F} = \vec{f}(M)\, dm$$

Soit A un pt qq $\in$ (S)

$$\vec{V}(M \in S/R) = \vec{V}(A \in S/R) + \vec{\Omega}_{S/R} \wedge \vec{AM}$$

$$P(\vec{F}_{repartie}) = \vec{V}(A \in S/R) \underbrace{\int_{M \in S} d\vec{F}}_{repartie} + \int_{M \in (S)} (\vec{\Omega}_{S/R} \wedge \vec{AM}) \cdot d\vec{F}$$

2 permutation circulaire

$$\vec{\Omega}_{S/R} \int_{M \in S} \vec{AM} \wedge d\vec{F}$$

$$P\, \vec{F}_{repartie} = \vec{V}(A \in S/R) \cdot \vec{F}_{repartie} + \vec{\Omega}_{S/R} \cdot \vec{m}(A, \vec{F}_{repartie})$$

$$= (\underset{\text{cinématique}}{\Gamma_C(A, S/R)} \cdot \underset{\text{force}}{\Gamma_G(A, S/R)})$$

II Théorème de la puissance et théorème de l'energie cinétique

Soit Σ un systeme en mvt /R ou R' (R galiléen et R' non galiléen.

a) Σ = un système discret en mvt/R

$$2T(\Sigma/R) = \sum_i m_i V^2(M_i/R) = \sum m_i \vec{V}(M_i/R)\cdot\vec{V}(M_i/R).$$

$$\left.\frac{dT(\Sigma/R)}{dt}\right|_R = \sum_i m_i \vec{V}(M_i/R)\cdot\left.\frac{d\vec{V}(M_i/R)}{dt}\right|_R$$

$$= \sum_i m_i \vec{V}(M_i/R)\cdot\vec{\gamma}(M_i/R) \quad *$$

d'après la $2^{ème}$ loi de Newton.

$$\vec{F}_{résultante} = \sum_i \vec{f}_i + \sum_i\sum_{j\neq i}\vec{F}_{j\to i} = \vec{f}_{ext} + \vec{f}_{int} = \sum_i m_i\vec{\gamma}(M_i/R) = m\vec{\gamma}(M/R)$$

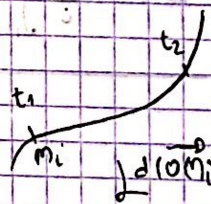
$$* = \sum \vec{V}(M_i/R)\cdot\vec{f}_{iext} + \sum_i\sum_{i\neq j}\vec{V}(M_i/R)\cdot\vec{f}_{j\to i} = P(\vec{f}_{ext\,résultante}) + P(\vec{f}_{int\,résultante})$$

$$\boxed{\left.\frac{dT(\Sigma/R)}{dt}\right|_R = P(\vec{f}_{ext\,résultante}) + P(\vec{f}_{int\,résultante})}$$

C'est le th de la puissance appliqué à Σ dans R: Galiléen

on deduit le th de l'energie cinétique qui est un cas particulier du th de la puissance lorsque la trajectoire de chaque pt M_i de Σ dans R est connue en effet :

$$\frac{dT}{dt} = \frac{dW(\vec{f}^{ext}_{result})}{dt} + \frac{dW(\vec{f}^{int}_{resu})}{dt}$$



$$d(\vec{OM_i}) = d\vec{r}_{mi}$$

$$dT = dW(\vec{f}^{ext}_{resu}) + dW(\vec{f}^{int}_{resu})$$

$$\boxed{\Delta T = \sum_i \int_{(1)}^{(2)} \vec{f}_{iext}\cdot d\vec{r}_{m_i} + \sum_i\sum_{j\neq i}\int_{(1)}^{(2)}\vec{f}_{j\to i}\cdot d\vec{r}_{mi} = T_2 - T_1}$$

b) Σ = un système discret en mvt /R'.

$$2T(\Sigma/R) = \sum_i m_i V^2(m_i/R) = \sum_i m_i \vec{V}(m_i/R')\vec{V}(m_i/R')$$

$$\frac{dT(\Sigma/R)}{dt}_{/R'} = \sum_i m_i \vec{V}(m_i/R')\vec{\gamma}(m_i/R')$$

d'après la deuxième loi de Newton appliquée à Σ dans R' non galiléen

$$\vec{F}_{\substack{\text{résultante}\\ \text{réelle}}} + \vec{F_e} + \vec{f_c} = m\vec{\gamma}(G/R') = \sum_i m_i \vec{\gamma}(m_i/R')$$

on obtient :

$$\frac{dT(\Sigma/R)}{dt}_{/R'} = P(\vec{F}_{\substack{\text{résultante}\\ \text{réelle}}}) + P(\vec{F_e}) + P(\vec{F_c})$$

or $P(\vec{F_c}) = 0$ car $\sum_i \vec{V}(m_i/R')(-2m_i \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \vec{V}(m_i/R')) = 0$

$$\frac{dT(\Sigma/R')}{dt}_{/R'} = P(\vec{F}_{\substack{\text{résultant}\\ \text{réelle}}}) + P(\vec{F_c})$$

on deduit le th de l'énergie cinétique qui est un cas particulier du th de la puissance lorsque la trajectoire est connu dans R' en effet

$$\frac{dT}{dt} = \frac{dW}{dt}(\vec{f}^{ext}_{résu}) + \frac{dW}{dt}(\vec{f}^{int}_{résu}) + \frac{dW}{dt}(\vec{Fe})$$

$$dT = dW(\vec{f}^{ext}_{résu}) + dW(\vec{f}^{int}_{résu}) + dW(\vec{Fe})$$

$$\boxed{\Delta T = \sum_i \int_{(1)}^{(2)} \vec{f}_{i\,ext}\, d(\vec{r}_{mi}) + \sum_i \sum_{j\neq i} \int_{(1)}^{(2)} \vec{f}_{j\to i} \cdot d(\vec{r}_{mi}) + \sum_i \int_{(1)}^{(2)} \vec{f_e}\, d(\vec{r}_{mi})}$$

avec $\vec{f_e} = -m_i \vec{\gamma_e}(M_i \in R'/R)$

$\vec{f_e} = \vec{\gamma}(O'/R) + \frac{d\vec{\Omega}_{R'/R}}{dt} \wedge \vec{O'm} + \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \vec{O'm}$

c) Σ = système continue = solide (S) indeformable

$$T(S/R) = \frac{1}{2}\int_{M\in(S)} V^2(M\in S/R)\, dm = \frac{1}{2}\int_{M\in(S)} \vec{V}(M\in S/R)\cdot\vec{V}(M\in S/R)\, dm.$$

$$\frac{dT(S/R)}{dt}_{/R} = \int_{M\in(S)} \vec{V}(M\in S/R)\,\vec{\gamma}(M\in S/R)\, dm.$$

Soit $C \in (S)$ $\quad \vec{V}(M\in S/R) = \vec{V}(C\in /R) + \vec{\Omega}_{S/R} \wedge \vec{CM}$

2 permutation circulaire

$$\frac{dT(S/R)}{dt} = \vec{V}(C\in S/R)\int \vec{\gamma}(M\in S/R)\, dm + \int (\vec{\Omega}_{S/R} \wedge \vec{CM})\cdot\vec{\gamma}(M\in S/R)\, dm$$

$$+ \Omega_{S/R} \underbrace{\int \vec{CM} \wedge \vec{\gamma}(M\in S/R)\, dm}_{\vec{D}(C,S/R)}.$$

$$\frac{dT(S/R)}{dt}\Big/_R = \vec{V}(C\in S/R)\cdot\vec{\gamma}(S/R) + \vec{\Omega}_{S/R}\cdot\vec{D}(O,S/R_0) = \left(\mathcal{T}_{\text{cinématique}}(C,S/R),\ \mathcal{T}_D(C,S/R)\right)$$

i) Si R est galilien

d'après les théorèmes généraux

$$\mathcal{T}_D(C,S/R) = \mathcal{T}_{\substack{\text{Force}\\ \text{réelle}}}(C,S/R)$$

$$\boxed{\frac{dT(S/R)}{dt}\Big/_R = \mathcal{T}_{\text{cinématique}}(C(S/R)),\ \mathcal{T}_D(C,S/R)} = P\left(\vec{F}_{\substack{\text{resultante}\\ \text{réelle}}}\right)$$

ii) Si R' est non galiléen

$$\mathcal{T}_D(C,S/R') = \mathcal{T}_{\substack{\text{Force}\\ \text{reelle}}}(C,S/R) - \mathcal{T}_{D_e}(C,S/R) - \mathcal{T}_{D_c}(C,S/R_0)$$

$$\boxed{\frac{dT(S/R)}{dt}\Big/_{R'} = P\left(\vec{F}_{\substack{\text{resultante}\\ \text{réelle}}}\right) + P(\vec{F}_e)}$$

Le théorème d'energie cinétique qui est un cas particulier du théorème de la puissance lorsque la trajectoire de chaque pt $M\in(S)$ est connu dans R ou R' ou lorsque la trajectoire du c.d.m est connue dans R ou R'

i) Si R est galiléen

$$dT(S/R) = dW\left(\vec{F}_{\substack{\text{résu}\\ \text{reelle}}}\right) = \sum_i \vec{f}_{\substack{i\,ext\\ \text{localisée}}}\, d\vec{r}_{m_i} + \int_{M\in(S)} d\vec{r}_m \cdot \vec{f}(M)\, dm$$

ii) Si R non galiléen

$$dT(S/R) = dW\left(\vec{F}_{\substack{\text{résu}\\ \text{reelle}}}\right) + dW(\vec{F}_e) \qquad \text{avec } \vec{F}_e = \sum_i \vec{f}_{ie}$$

$$= dW\left(\vec{F}_{\substack{\text{résu}\\ \text{réelle}}}\right) + \sum_i f_{ie}\, d(\vec{r}_{m_i})$$

III Energie mécanique d'un systeme Σ, en mvt/R ou R'

il y a 2 cas à envisager

- la conservation de l'E_{mec}
- la non conservat° de l'E_{mec}

a) Conservation de l'Emec ou système conservatif.

L'énergie mécanique d'un système Σ en mvt R ou R' est conservée ssi ttes les forces app à Σ dans R ou dans R' st conservatifs c.à.d leurs rotationnels est nul ou dérivent d'une énergie potentielle.

Le système Σ peut être considérée comme isolé

Dans ce cas

E_{mec} = constante qu'on appelle une constante de mvt

et l'équation $E_{mec} = T(\Sigma/R) + E_p$ est une intégrale première de mvt $= c^{te}$.

Ep énergie potentielle dont dérive toutes les forces conservatifes

c.à.d

Si R galiléen

$$\vec{F}_{\substack{résultante\\réelle}} = -\vec{grad}\, E_p$$

$$\vec{F}_{résu} \cdot d\vec{r_G} = -dE_p \Rightarrow E_p = \int \vec{F}_{résu} \cdot d\vec{r_G}$$

b) Système non conservatif ou Emec non conservée ou non isolé

C'est un système qui possède des forces conservatives et des forces non conservatives

- Pour les forces conservatives dérivent d'une énergie potentielle Ep
- Pour les forces non conservatives ne peuvent pas s'écrire sous forme d'énergie potentielle ce st des forces dissipatives.

$$dT = dW(\vec{F}_{résultante}) = dW(\vec{F}_{conservatives}) + dW(\vec{F}_{non\,conservatives})$$

$$= -dE_p + dW(\vec{F}_{non\,con})$$

système Σ en mv

$$d(\underbrace{T + E_p}_{E_{mec}}) = dW(\vec{F}_{non\,conservatif})$$

$$d(E_{mec}) = dW(\vec{F}_{non\,cons})$$

Entre 2 instants t_1 et t_2

$$\Delta E_{mec} = E_{mec}(t_2) - E_{mec}(t_1) = \int_{(1)}^{(2)} \vec{F}_{non\,conserv} \cdot d\vec{r} < 0$$

car $\vec{F}_{non\,conservat}$ est tjr opposé au déplacement

$\rightarrow E_{mec}(t_2) < E_{mec}(t_1)$

Emec ↘ au cours du temps de elle cède au milieu extérieur sous une autre forme