Chapitre 3 : Cinétique du solide parfait.

I - Les elmts cinétiques

Ce sont respectivement le centre de masse G et la matrice d'inertie du solide qui joue un rôle très important dans l'application des théorèmes generaux.

1 - centre de masse G

Soit Σ = un systeme materiel en mvt /R.

a) Déf

α) Σ = système discret càd formé de N pts materiels de masse respective $m_1, \ldots, m_N$

On appelle centre de masse de Σ le barycentre G des pts $m_1, \ldots, m_N$ pondérés de $m_1, \ldots, m_N$.

$$\boxed{(m_1 + \ldots + m_N)\,\vec{O'G} = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{O'm_i}}$$ où O' est un pt qq de $\mathcal{E}$

$m = \sum_{i=1}^{N} m_i$ = masse totale

Cas particulier. $O' \equiv G$. $$\boxed{\sum m_i \vec{Gm_i} = \vec{0}}$$

β) Σ = système contenu = (S) = solide.

$\sum_i m_i \longrightarrow \int_{P\in(S)} dm(P)$ P = centre de l'elmt

$\sum_i m_i \vec{O'm_i} \longrightarrow \int_{P\in(S)} \vec{O'P}\, dm(P)$

$$\boxed{m\,\vec{O'G} = \int \vec{O'P}\, dm(P)}$$ avec $m = \int_{P\in(S)} dm(P)$

Si $O' \equiv G \longrightarrow \int_{P\in(S)} \vec{GP}\, dm(P) = \vec{0}$

b) Les elmts de symetrie materielles d'un solide.

Soit (S) un solide dont la masse est repartie uniformement en longueur ou en surface ou en volume

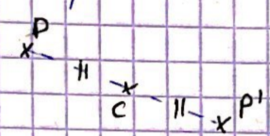
- $dm = \lambda dl$ $\lambda = cte$ = distribution linéaire
- $dm = \sigma ds$ $\sigma = cte$ = distribution surfacique
- $dm = \rho dV$ $\rho = cte$ = distribution volumique

Il existe 3 types de symetrie matérielle d'un solide :

i) symetrie matérielle d'un solide / à un pt C

Le solide possède un centre de symetrie matérielle ssi

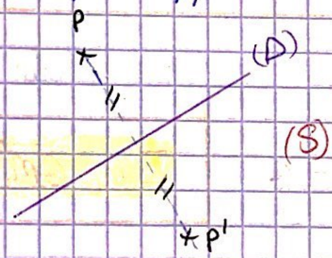
$\Leftrightarrow \forall P \in (S)$ son symetrique P' existe et $\in (S)$



ii) Symetrie matérielle d'un solide par rapport à un axe Δ

Le solide possède un axe de symetrie materiel ssi

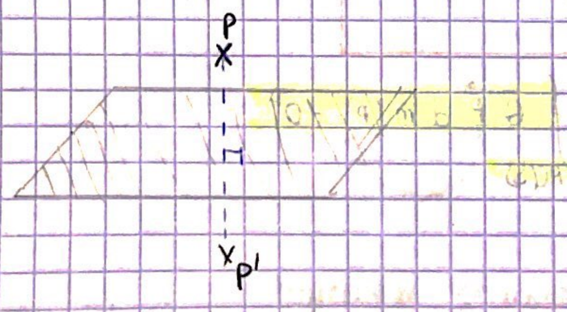
$\Leftrightarrow \forall P \in (S)$ son symetrique par rapport D, P' existe et $\in (S)$



iii) Symetrie matérielle d'un solide

Le solide admet un plan de symetrie matérielle ssi

$\forall P \in (S)$, son symetrique materielle par rapport à ce plan P' existe et $\in (S)$



* Position particulière du centre de masse G d'un solide ayant des élmt de symétrie matérielles.

i) si (S) possède un centre de symétrie matérielle alors G est confondu

ii) si (S) possède un axe de symétrie matérielle alors $G \in$ à cet axe

iii) si (S) possède un plan de symétrie matérielle alors $G \in$ à ce plan

c) Généralisation du calcul du C.m d'un solide $S = \bigcup_{i}^{N} S_i = S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_N$

i) Cas d'un solide formé par deux élmts S_1 et S_2

C.m G de $S = S_1 \cup S_2$

$S_1 \longrightarrow m_1 \longrightarrow$ C.m G_1

$S_2 \longrightarrow m_2 \longrightarrow$ C.m G_2

$S \longrightarrow m_1 + m_2 \longrightarrow$ C.m G donné par :

$$\boxed{(m_1 + m_2)\,\vec{OG} = m_1\,\vec{OG_1} + m_2\,\vec{OG_2}}$$

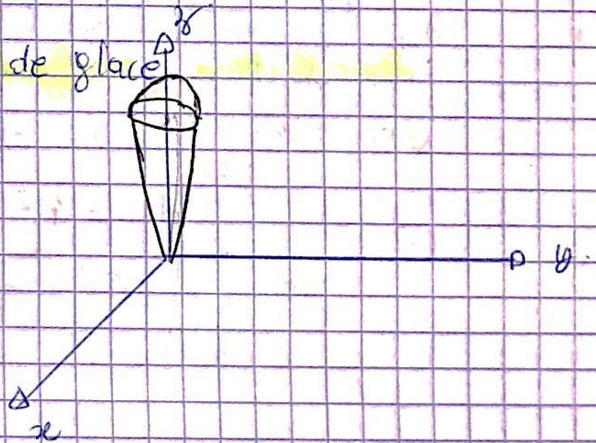
ii) Généralisation

$S = S_1 \cup \dots \cup S_N$

$$(m_1 + m_2 + \dots + m_N)\,\vec{OG} = m_1\,\vec{OG_1} + \dots + m_N\,\vec{OG_N}$$

Exemple

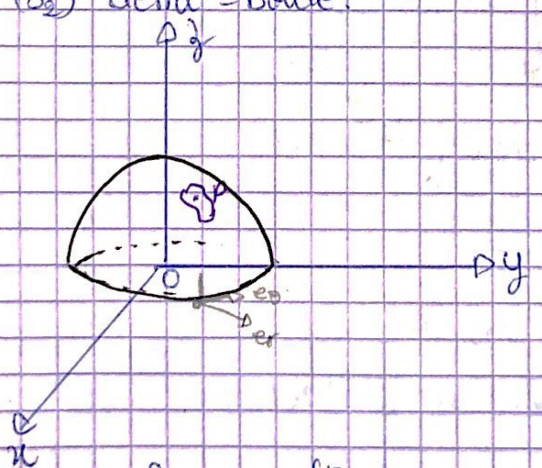
Centre de masse d'un cornée de glace



$S = S_1 \cup S_2$

(S_1) cône $(O, \vec{k})$

(S_2) demi-boule.



(Oz) est un axe de symétrie matérielle de (S)

$\longrightarrow G_2 \in$ à cet axe

$$m z_G = \int_{P \in (S)} z \, dm(P)$$

$e_r \longrightarrow dr$

$e_\theta \longrightarrow r d\theta$

$e_\varphi \longrightarrow r \sin\theta \, d\varphi$

$$dm = \rho dV = \rho r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\varphi$$

Scanné avec CamScanner

$$m = \int dm(P) = \rho \int_0^R r^2 dr \int_0^{\pi/2} \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \rho \frac{2}{3} \pi R^3.$$

$$\int_{P\in(S)} z \, dm(P) = \int_{P\in(S)} r\cos\theta \, \rho r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\varphi = \rho \int_0^R r^3 dr \int_0^{\pi/2} \sin\theta\cos\theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$= \rho \frac{R^4}{4} \times \left[\frac{1}{2}\sin^2\theta\right]_0^{\pi/2} \times 2\pi$$

$$= \rho \frac{R^4}{4} \times \frac{1}{2} \times 2\pi$$

$$= \rho \frac{\pi R^4}{4}$$

$$= \frac{3}{8} R m.$$

$$= m z_G.$$

$$\Rightarrow z_G = \frac{3}{8} R.$$

* centre de masse d'une demi sphère ou d'une demie boule creuse

$\vec{e_r} \longrightarrow dr$

$\vec{e_\theta} \longrightarrow r d\theta$

$e_\varphi \longrightarrow r \sin\theta \, d\varphi$

distribution surfacique (uniformément $\sigma = cte$)

$\forall P \in (S) \longrightarrow r = cte = R \longrightarrow dr = 0$

$dS = R^2 d\theta \sin\theta \, d\varphi \longrightarrow dm_S = \sigma dS$

$$m_1 = \int \sigma dS = \sigma R^2 \int_0^{\pi/2} \sin\theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$= \sigma R^2 \left[-\cos\theta\right]_0^{\pi/2} \times 2\pi$$

$$= 2\pi R^2 \sigma.$$

$$m_1 z_{G_1} = \int_{P\in(S)} z \, dm_1(P) \qquad m_1 \vec{CG} = \int_{P\in(S)} \vec{CP} \, dm(P)$$

(Cz) est un axe de symetrie materielle de (S) $\to z_{G_1} \in$ à cet axe

$$\Rightarrow \begin{cases} x_{G_1} = 0 \\ y_{G_1} = 0 \\ z_{G_1} \neq 0 \end{cases}$$

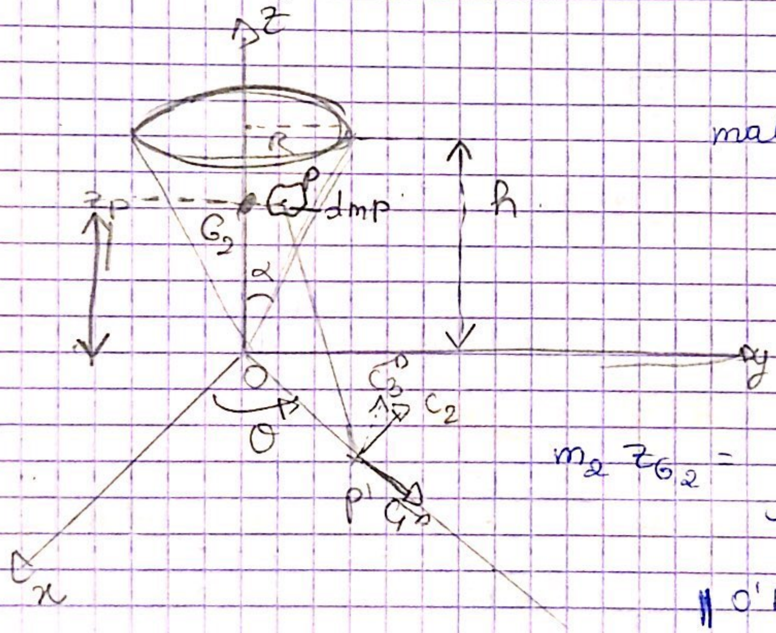
$$\int_{P\in(S)} z\,dm(P) = \int_{P\in(S_1)} R\cos\theta\,\sigma R^2 \sin\theta\,d\theta\,d\varphi = \sigma R^3 \int_0^{\pi/2} \sin\theta\cos\theta\,d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$= \sigma R^3 \left[\frac{1}{2}\sin^2\theta\right]_0^{\pi/2} \times 2\pi$$

$$m_1 z_{G_1} = \sigma\pi R^3 = \frac{m_1}{2} \times R$$

$$\Rightarrow z_G = \frac{R}{2}$$

* centre de masse d'un cone plein (S_2) de masse S_2, de rayon de surface R et de hauteur h



(Oz) est un axe de symetrie materielle de (S_2) $\to G_2 \in$ à cet axe.

$$\Rightarrow \begin{cases} x_{G_2} = 0 \\ y_{G_2} = 0 \\ z_{G_2} \neq 0 \end{cases}$$

$$m_2 z_{G_2} = \int z\,dm_2(P)$$

$\|O'P\| = r$ P' est la projection orthogonale de P sur le plan (xoy)

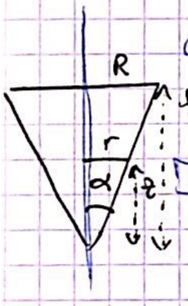
cône plein $\to$ la masse est repartie uniformément ou uniforme en volume

symétrie cylindrique $(\vec{c_1}, \vec{c_2}, \vec{c_3} = \vec{b})$

$\vec{C_1} \longrightarrow dr$

$\vec{C_2} \longrightarrow r d\theta$ $\Big| \longrightarrow dV = dr \times r d\theta \times dz$

$\vec{C_3} \longrightarrow dz$



$dm(P) = \rho \, r \, dr \, d\theta \, dz$ $\quad \rho = cte$ = densité volumique

= distribution volumique

Il existe une relation étroite entre z et r

$$\tan\alpha = \frac{R}{h} = \frac{r}{z} \longrightarrow r = r(z) = \frac{Rz}{h}$$

$$m_2 = \rho \int_0^h \left(\int_0^{r_2} r\,dr\right) dz \int_0^{2\pi} d\theta$$

$$= \rho \int_0^h \left(\frac{r_2^2}{2}\right) dz \times 2\pi$$

$$= \rho \frac{R_2^2}{2h^2} \times 2\pi \int_0^h z^2 dz$$

$$= \rho \frac{R_2^2}{h^2} \times \pi \times \frac{h^3}{3}$$

$$m_2 = \rho \frac{R^2 \times h \, \pi}{3}$$

$$\int z \, dm_2(P) = \rho \int_0^h z \left(\int_0^{r_2} r\,dr\right) dz \int_0^{2\pi} d\theta$$

$$= \rho \int_0^h z \frac{r_2^2}{2} dz \times 2\pi$$

$$= \rho \int_0^h \frac{z R_2^2 \times z^2}{2h^2} dz \times 2\pi$$

$$= \rho \frac{R_2^2 \times \pi}{h^2} \times \int_0^h z^3 dz$$

$$= \rho \frac{R_2^2 \times \pi}{h^2} \times \frac{h^4}{4} = \rho \frac{R_2^2 \times \pi \times h^2}{4}$$

$$= 3 m_2 \times \frac{h}{4} = m_2 z_{G_2}$$

$$\boxed{z_{G_2} = 3/4 \, h}$$

* centre de masse d'un cone creux

La masse est répartie en surface uniformément.

$$dm(P) = \sigma \, dS$$

$$= \sigma \, r_2 \, d\theta \, dz.$$

$$m_2 = \sigma \int_0^h \frac{R}{h} \times z \, dz \int_0^{2\pi} d\theta$$

$$m_2 = \sigma \frac{R}{h} \times \frac{h^2}{2} \times 2\pi$$

$$m_2 = \sigma \pi R h$$

$$m_2 \, z_{G_2} = \int_{P \in (S_2)} z \, dm_2(P)$$

$$\int z \, \sigma \, r_2 \, d\theta \, dz = \frac{\sigma R}{h} \int_0^h z^2 dz \int_0^{2\pi} d\theta$$

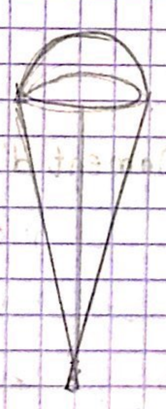
$$= \frac{\sigma R}{h} \times \frac{h^3}{3} \times 2\pi$$

$$= \sigma \pi R h^2 \times \frac{2}{3}$$

$$= \frac{2}{3} m_2 h$$

$$= m_2 \, z_{G_2}$$

$$\Rightarrow z_{G_2} = \frac{2}{3} h$$



* centre de masse d'une cornée de glasse pleine

$$(m_1 + m_2) \vec{OG} = m_1 \vec{OG_1} + m_2 \vec{OG_2}$$

On suppose que la distribution volumique est la même

$$\left[\frac{2}{3} \pi R^3 + \frac{\pi R^2 \times h}{3}\right] \vec{OG} = \left(\frac{2}{3} \pi R^3\right)\left[h + \frac{3}{8} R\right] \vec{k} + \frac{\pi R^2 h}{3}\left[\frac{3}{4} R\right] \vec{k}$$

* centre de masse d'un cornée de glace vide

$$\left[2\pi R^2 + \pi R h\right] \vec{OG} = 2\pi R^2 \left[\frac{R}{2} + h\right] \vec{k} + \pi R h \times \frac{2}{3} h \vec{k}$$

II Moment d'inertie et operateur d'inertie

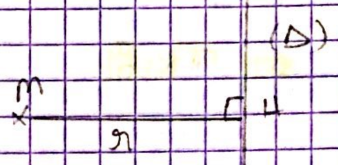
a) Definition

α) Σ = un pt materiel M de masse m

Le moment d'inertie de Σ / axe Δ est donné par

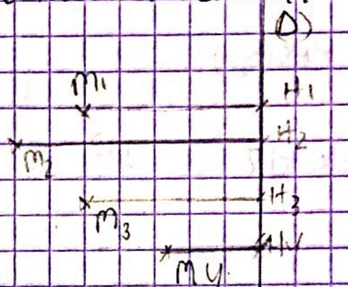
$I(\Sigma/\Delta) = m.r^2$ $\qquad r = d(M$ à l'axe$)$

$I(\Sigma/\Delta) = m \|\vec{MH}\|^2$



b) Σ = un systeme de pt materiels $M_1, \dots, M_N$ de masse respective $m_1, \dots, m_N$.

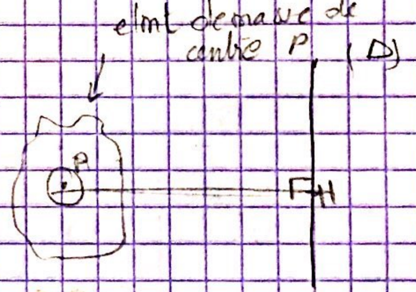
$$I = \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2$$



$r_i = d(M_i/\Delta) = \|\vec{M_iH_i}\|^2$

c) Σ = un systeme continue = solide (S)

$$I(S/\Delta) = \int_{P\in(S)} \|\vec{PH}\|^2 \, dm(P)$$



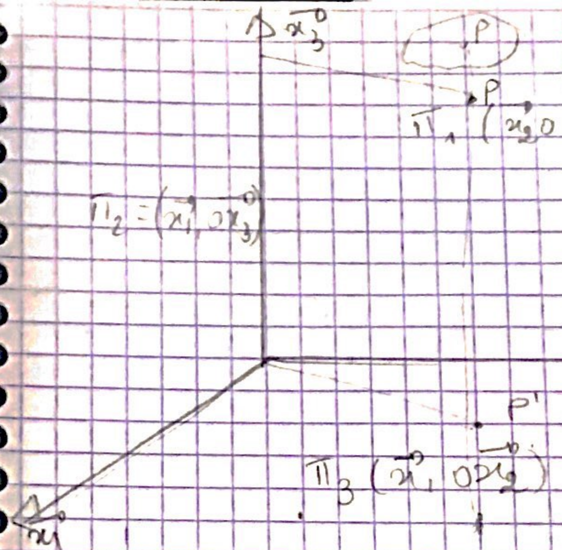
β) Moment d'inertie d'un solide (S) / un plan / à un axe / à un pt

i) Moment d'inertie d'un solide / un plan

soit $R(O, \vec{x_1}, \vec{x_2}, \vec{x_3})$ un repere lié au solide et soit $P(x_1, x_2, x_3)$, un pt qui est le centre de l'elmt de coordonnée dans $R(O, \vec{x_1}, \vec{x_2}, \vec{x_3})$

$$\vec{OP} = x_1 \vec{x_1} + x_2 \vec{x_2} + x_3 \vec{x_3}$$

Scanné avec CamScanner



• $I(S/\underset{\vec{x}_1 O \vec{x}_2}{\Pi_3}) = \int_{P\in(S)} x_3^2 \, dm(P)$

• $I(S/\underset{x_1 O x_3}{\Pi_2}) = \int_{P\in(S)} x_2^2 \, dm(P)$.

• $I(S/\underset{x_2 O x_3}{\Pi_1}) = \int_{P\in(S)} x_1^2 \, dm(P)$.

ii) moment d'inertie de (S) / à un axe.

$$I(S/Ox_3) = \int_{P\in(S)} (x_1^2 + x_2^2)\, dm(P) = I(S/\Pi_1) + I(S/\Pi_2).$$

$$I(S/Ox_1) = \int (x_2^2 + x_3^2)\, dm(P) = I(S/\Pi_2) + I(S/\Pi_3).$$

$$I(S/Ox_2) = \int (x_1^2 + x_3^2)\, dm(P) = I(S/\Pi_1) + I(S/\Pi_2)$$

iii) moment d'inertie de (S) par rapport à un pt O

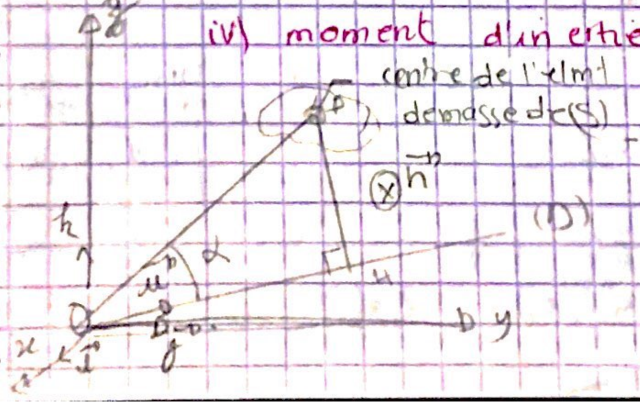
$$I(S/O) = \int_{P\in(S)} \|\vec{OP}\|^2 \, dm(P) = \int (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)\, dm(P)$$

$$= \int x_1^2 \, dm(P) + \int x_2^2 \, dm(P) + \int x_3^2 \, dm(P)$$

$$= I(S/\Pi_1) + I(S/\Pi_2) + I(S/\Pi_3).$$

$$= \frac{1}{2}\left[(I(S/Ox_1) + I(S/Ox_2) + I(S/Ox_3) \right]$$

iv) moment d'inertie par rapport à un axe quelconque d'un solide.



$$I(S/D) = \int \|PH\|^2 \, dm(P)$$

$$\vec{OP} \underset{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}}{=} \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix}$$

Montrons que $PH^2 = \underbrace{(\vec{OP} \wedge \vec{u})}_{A} \cdot (\underbrace{\vec{OP}}_{B} \wedge \underbrace{\vec{u}}_{C})$

$\vec{OP} \wedge \vec{u} = \|OP\|^2 \times 1 \times \sin\alpha \, \vec{n}$

$(\vec{OP} \wedge \vec{u}) \cdot (\vec{OP} \wedge \vec{u}) = \|OP\|^2 \sin^2\alpha \xrightarrow{or} \sin\alpha = \dfrac{PH}{\|\vec{OP}\|}$

$\downarrow$

$= \|PH\|^2 \longrightarrow PH = \|\vec{OP}\| \sin\alpha$

$\vec{A} \cdot (\vec{B} \wedge \vec{C}) = (\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}) = (\vec{C}, \vec{A}, \vec{B})$

$= \vec{C} \cdot (\vec{A} \wedge \vec{B})$

$= \vec{u} \cdot \left((\vec{OP} \wedge \vec{u}) \wedge \vec{OP} \right)$

$$I(S/D) = \vec{u} \cdot \underbrace{\int_{P \in (S)} (\vec{OP} \wedge \vec{u}) \wedge \vec{OP} \, dm(P)}_{\text{OPERATEUR D'INERTIE EN O APPLIQUÉ À } \vec{u}}$$

$= \vec{u} \cdot \vec{I_O}(\vec{u})$ avec $\vec{I_O}(\vec{u}) = \int (\vec{OP} \wedge \vec{u}) \wedge \vec{OP} \, dm(P)$.

$= \mathcal{I}(O, S) \vec{u}$.

$I(S/D) =$ la projection orthogonale de l'operateur d'inertie $\vec{I_O}(\vec{u})$ sur $\vec{u}$.

$\mathcal{I}(O,S)$ = matrice d'inertie de S au pt O.

$I_\Delta = \vec{u} \cdot \vec{I_O}(\vec{u})$ avec $\vec{u}$ direction de (D)

Dans la litterature, on définit d'inertie par :

$\vec{u} \longrightarrow \vec{I_C}(\vec{u}) = \int \vec{CP} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{CP}) \, dm$ C pt quelconque

Montrons que $\vec{I_O}(\vec{u}) = \mathcal{I}(O,S) \vec{u}$

$\vec{OM} = \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix}_{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}}$ $\vec{u} = \begin{vmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{vmatrix}_{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}}$ $\vec{OM} \wedge \vec{u} = \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix}_{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}} \wedge \begin{vmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{vmatrix}_{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}} = \begin{vmatrix} y u_3 - z u_2 \\ -(x u_3 - z u_1) \\ x u_2 - y u_1 \end{vmatrix}_{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}}$

Scanné avec CamScanner

$$\vec{OM} \wedge \vec{u} = \begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \vec{u}'$$

$$\vec{OM} \wedge \vec{u} = \vec{u}'$$

$$\vec{I}_0 (\vec{u}) = - \int_{M \in (S)} \vec{OM} \wedge (\vec{OM} \wedge \vec{u}) \, dm$$

$$\vec{OM} \wedge \vec{u}' = \begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u'_1 \\ u'_2 \\ u'_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -(y^2+z^2) & xy & xz \\ yx & -(x^2+z^2) & yz \\ zx & zy & -(x^2+y^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \int (y^2+z^2)\, dm & -\int xy \, dm & -\int xz \, dm \\ -\int yx \, dm & \int x^2 + z^2 dm & -\int yz \, dm \\ -\int zx \, dm & -\int zy \, dm & \int (x^2+y^2)\, dm \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

$$= I(O,S) \, \vec{u}$$

avec $I(O,S) = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{xy} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{xz} & I_{yz} & I_{zz} \end{pmatrix}_{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3}$

Scanné avec CamScanner

$$I_{xx} = \int (y^2 + z^2)\, dm$$
$$I_{yy} = \int (x^2 + z^2)\, dm$$
$$I_{zz} = \int (x^2 + y^2)\, dm$$

Les moments d'inertie de la matrice $I(O,S)$

$$I_{xy} = I_{yx} = -\int xy\, dm$$
$$I_{xz} = I_{zx} = -\int xz\, dm$$
$$I_{yz} = I_{zy} = -\int yz\, dm$$

Les moments d'inertie de la matrice $I(O,S)$

$I(O,S)$ est une matrice symétrique

$$I_{xx} = \int (\vec{OM} \wedge \vec{e_1}) \cdot (\vec{OM} \wedge \vec{e_1})\, dm$$

$$\vec{OM} \wedge \vec{e_1} = \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ z \\ -y \end{vmatrix}$$

$$(\vec{OM} \wedge \vec{e_1}) \cdot (\vec{OM} \wedge \vec{e_1}) = z^2 + y^2$$

$$I_{xx} = \int (z^2 + y^2)\, dm$$

$I(O,S)$ est une matrice symétrique donc diagonalisable

$$\det | I(O,S) - \lambda I_{di} | = 0 \ ?$$

Si $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}$ sont les vecteurs propres et $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sont les valeur propres

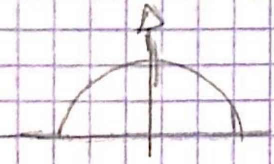
$$I(O,S) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

En mécanique, on utilise les elmts de symetrie materielle d'un solide (S) pour avoir $I(O,S)$ diagonal γ) Les elements de symetrie materielle d'un solide (S)

Soit $(A, \vec{u}^0, \vec{v}^0, \vec{w}^0)$ un repère lié au solide

Si $(A, \vec{u}^0)$ est un axe de symetrie materielle de (S)

Alors $I_{xy} = I_{xz} = I_{yx} = I_{zx} = 0$



donc $\vec{u}^0$ et $\vec{v}^0$ propre de $\bar{\bar{I}}(C,S)$ $\forall C \in (A, \vec{u}^0)$

On dit aussi $(C, \vec{u}^0)$ est un axe principale d'inertie

$$\vec{AM}^0 = \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} \qquad \vec{AM}^1 = \begin{vmatrix} x' = x \\ y' = y \\ z' = z \end{vmatrix}$$

$$I_{xy} = -\left[\int_{M \in (S)} xy\, dm\,(M) + \int_{M' \in (S)} x'y'\, dm\,(M')\right]$$

* Si $(A, \vec{u}^0, \vec{v}^0)$ est un plan de symetrie materielle de (S)

Alors $\vec{w}^0 \perp$ à ce plan $(A, \vec{u}^0, \vec{v}^0)$ est la direction d'un axe principal d'inertie de (S) $\rightarrow I_{zx} = I_{zy} = 0 = I_{yz} = I_{xz}$

* Si $(A, \vec{u}^0, \vec{v}^0, \vec{w}^0)$ est une base principale d'inertie de (S)

ssi l'une des conditions ci-après est vérifiée

- (S) admet deux plans de symetrie materielle
- (S) admet deux axes de symetrie materielle
- (S) admet un axe et un plan de symetrie materielle

Un solide (S) admet un axe de symetrie de révolution ssi cet axe est un axe de symetrie materielle de (S).

En plus $\forall P \in (S)$, si on le fait tourner d'un angle qq α autour de l'axe, il doit rester dans le solide (S) en masse.

* $(A, \vec{w}^0)$ est un axe de symetrie de révolution de (S)

$\rightarrow I_{zx} = I_{zy} = 0$ et $I_{xx} = I_{yy}$

Les théorèmes de Koenning et d'Hygens pour le calcul respectivement de la matrice d'inertie et le moment d'inertie par rapport à un axe

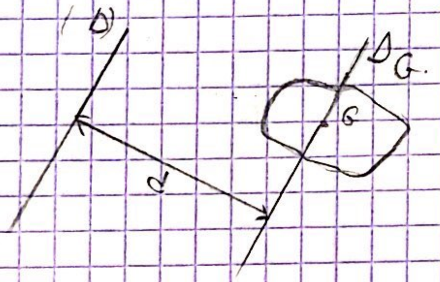
Théorème de Koenning pour le calcul de la matrice d'inertie

$$I(C,S) = I(G,S) + I(C, G\{m\})$$

$$I(C, G\{m\}) = \begin{pmatrix} m(y_G^2+z_G^2) & -m x_G y_G & -m x_G z_G \\ -m y_G x_G & m(z_G^2+x_G^2) & -m y_G z_G \\ -m z_G x_G & -m z_G y_G & m(x_G^2+y_G^2) \end{pmatrix}$$

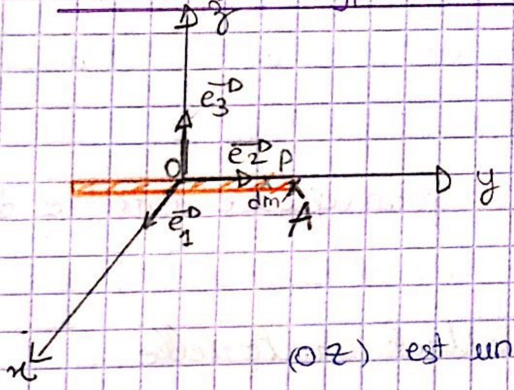
Théorème d'Hygens

$$I_\Delta = I_{\Delta G} + m d^2$$



Application au calcul de la matrice d'inertie d'un solide (S)

a) (S) = type de masse, de longueur 2ℓ



admet un axe et un plan de symetrie materielle

(Oz) est un axe de symetrie matérielle de (S)

$$\rightarrow I_{zx} = I_{zy} = I_{xz} = I_{yz} = 0$$

(xoz) est un plan de symetrie materielle de (S).

$\rightarrow$ (Oy) ⊥ plan (xoy) est un axe principale d'inertie

$$I_{yx} = I_{yz} = I_{xy} = I_{zy} = 0$$

donc

$$I(O,S) = \begin{pmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{pmatrix}$$

$$I_{xx} = \int (y^2 + z^2)\, dm \qquad I_{yy} = \int (x^2+z^2)\, dm \qquad I_{zz} = \int (x^2+y^2)\, dm$$

$$dm(P) = \lambda\, dy \qquad \lambda = \text{densité linéique} = cte$$

$$\forall P \in (S) \longrightarrow \overrightarrow{OP} = \begin{vmatrix} x_P = 0 \\ y_P \neq 0 \\ z_P = 0 \end{vmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} I_{xx} = \int_{P\in(S)} y^2 \, dm(P) \\ I_{yy} = 0 \\ I_{zz} = \int y^2 \, dm(P) \end{array}\right\} \longrightarrow \left\{\begin{array}{l} I_{xx} = I_{zz} = \int_{P\in(S)} y^2 dm(P) \\ I_{yy} = 0. \end{array}\right.$$

$$dm(P) = \lambda \, dy \longrightarrow m = \int_{P\in(S)} dm(P) = \lambda \int_{-\ell}^{\ell} dy$$

$$= 2\lambda \ell.$$

$$I_{xx} = I_{zz} = \int y^2 \, dm(P)$$

$$= \lambda \int_{-\ell}^{\ell} y^2 dy = 2\lambda \int_{-\ell}^{\ell} y^2 dy = 2\lambda \frac{\ell^3}{3}$$

$$= 2\lambda \ell \times \frac{\ell^2}{3}$$

$$= \frac{m\ell^2}{3}$$

$m = 2\lambda\ell$

$$I(O = G, S) = \begin{pmatrix} \frac{m\ell^2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m\ell^2}{3} \end{pmatrix}_{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3}$$

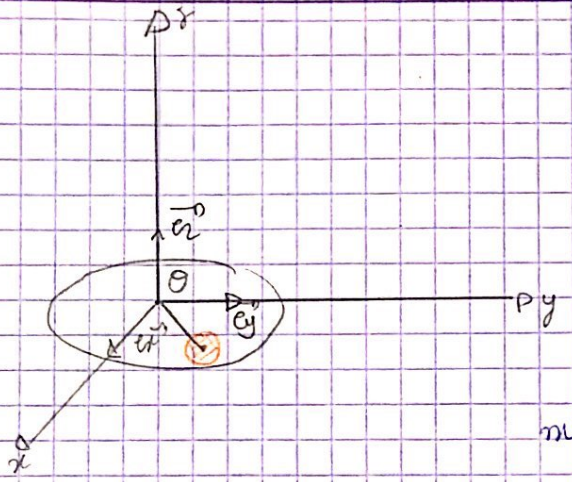
$$I(A, S) = I(G, S) + I(A, G\{m\})$$

$G = 0$

$$\overrightarrow{AG} = \begin{vmatrix} 0 \\ \ell \\ 0 \end{vmatrix} \qquad I(A, G\{m\}) = \begin{pmatrix} m\ell^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m\ell^2 \end{pmatrix}$$

$$I(A, S) = \begin{pmatrix} \frac{m\ell^2}{3} + m\ell^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m\ell^2 + \frac{m\ell^2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} m\ell^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} m\ell^2 \end{pmatrix}$$

b) (S) - Disque de centre O et de rayon R



(Oz) est un axe de symétrie de révolution de (S)

$I_{zx} = I_{zy} = I_{xz} = I_{yz} = 0$ et

$I_{xx} = I_{yy}$

Le plan (xOz) est un plan de symétrie matérielle de (S)

(Oy) est un axe principal d'inertie

$I_{yx} = I_{yz} = I_{xy} = I_{zx} = 0$.

$$I(O,S) = \begin{pmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{pmatrix}$$

- $I_{xx} = \int (z^2 + y^2)\, dm$ • $I_{yy} = \int (x^2 + z^2)\, dm$

- $I_{zz} = \int (x^2 + y^2)\, dm$

$\forall P \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in (S)$ on a $z = 0$.

Alors • $I_{xx} = \int_{P \in (S)} y^2\, dm$ • $I_{yy} = \int_{P \in (S)} x^2\, dm$ • $I_{zz} = \int (x^2 + y^2)\, dm$

$$I_{xx} + I_{yy} = 2 I_{xx} = 2 I_{yy} = \int (x^2 + y^2)\, dm$$

$$= I_{zz}$$

$$I_{xx} = I_{yy} = \frac{I_{zz}}{2}$$

$P \in$ plan $(xOy) \rightarrow$ repère polaire r, θ

$x^2 + y^2 = r^2$

$dm = \sigma\, ds = \sigma\, r\, dr\, d\theta$

$dm(P) = \sigma\, r\, dr\, d\theta \rightarrow m = \int dm(P) = \sigma \int_0^R r\, dr \int_0^{2\pi} d\theta$

$= \sigma \frac{R^2}{2} \times 2\pi = \sigma \pi R^2$

$$I_{zz} = \int r^2 \sigma r dr \, d\theta = \sigma \int_0^R r^3 dr \int_0^{2\pi} d\theta$$

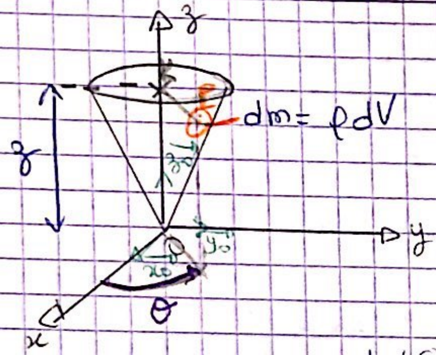
$$= \sigma \frac{R^4}{4} \times 2\pi$$

$$I_{zz} = \sigma \pi R^2 \times \frac{R^2}{2} = \frac{1}{2} m R^2$$

$$I_{xx} = I_{yy} = \frac{1}{4} m R^2$$

$$I(O,S) = \begin{pmatrix} \frac{mR^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mR^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mR^2}{2} \end{pmatrix}$$

c) matrice d'inertie d'un cône plein :



en O et en G

(Oz) est un axe de symetrie de révolution de (S)

$\longrightarrow I_{zx} = I_{zy} = 0$ et $I_{xx} = I_{yy}$.

Le plan (xOz) est un plan de symetrie materielle de (S) $\longrightarrow$ Oy $\perp$ plan (xOz) est un axe principal d'inertie de (S)

$$I(O,S) = \begin{pmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{pmatrix}_{(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)} \qquad I_{yx} = I_{yz} = 0$$

$$I_{xx} + I_{yy} = 2xx = 2yy = I_{zz} + 2\int_{P \in (S)} z^2 \, dm$$

$$I_{xx} = \int (y^2 + z^2) \, dm$$

$$I_{yy} = \int (x^2 + z^2) \, dm$$

$$\boxed{I_{zz} = \int (x^2 + y^2) \, dm}$$

$$\boxed{I_{xx} = I_{yy} = \frac{I_{zz}}{2} + \int z^2 \, dm}$$

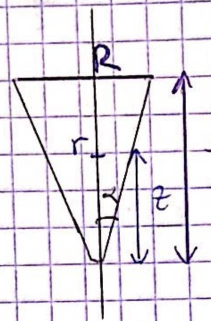
$dm = \rho\, dV \iff$ cône plein $\iff$ distribution volumique

La masse est répartie uniformément en volume $\iff \rho = cte$

$\vec{C_1} \longrightarrow dr$

$\vec{C_2} \longrightarrow r\,d\theta$

$\vec{C_3} = \vec{k} \longrightarrow dz$



$\tan\alpha = \frac{r}{z} = \frac{R}{h}$

$\Rightarrow r(z) = \frac{Rz}{h}$

- $dV = r\,dr\,d\theta\,dz$
- $m = \int dm$

$$= \rho \underbrace{\int_0^h \left(\int_0^{r(z)} r\,dr\right) dz}_{} \int_0^{2\pi} d\theta$$

$$= \rho \frac{r^2(z)}{2} \times 2\pi$$

$$= \rho \int_0^h \frac{2\pi \rho}{2} \frac{R^2 z^2}{h^2}\,dz = \rho \frac{\pi R^2}{h^2} \frac{h^3}{3}$$

$$\boxed{m = \frac{\rho \pi R^2 \times h}{3}} = \rho \times \text{Volume d'un cône plein.}$$

$$\int (x^2+y^2)\,dm = \int r^2 \rho\, r\,dr\,d\theta\,dz$$

$$= \rho \int_0^h \left(\int_0^{r(z)} r\,dr\right) dz \int_0^{2\pi} d\theta$$

$$= \rho \int_0^h \frac{R^4}{h^4} \times \frac{1}{4} z^4\,dz \times 2\pi$$

$$= \rho \frac{R^4}{h^4} \times \frac{h^5}{5} \times 2\pi$$

$$= \frac{\rho R^4 \times h \times \pi}{10}$$

$$\boxed{I_{zz} = \frac{3}{10} m R^2}$$

$$\int_{P \in (S)} z^2\,dm = \rho \int_0^h z^2 \left(\int_0^{r(z)} r\,dr\right) dz \int_0^{2\pi} d\theta$$

$$= \rho \times \frac{R^2}{2h^2} \int_0^h z^4\,dz \times 2\pi$$

$$= \rho \frac{\pi R^2}{h^2} \times \frac{h^5}{5} = \rho \frac{\pi R^2 \times h^3}{5} = \frac{3}{5} m h^2$$

$$I_{xx} = I_{yy} = \frac{1}{2} I_{zz} + \int z^2\,dm = \boxed{\frac{3}{20} m R^2 + \frac{3}{5} m h^2 = I_{xx} = I_{yy}}$$

Scanné avec CamScanner

$$I(O,S) = I(G,S) + I(O, G\{m\})$$

$$I(G,S) = I(O,S) - I(O, G\{m\})$$

$I(O, G\{m\})$? $\qquad \vec{OG} = \frac{3}{4} h \vec{z_0} = \begin{cases} x_G = 0 \\ y_G = 0 \\ z_G = \frac{3}{4} h \end{cases}_{(\vec{x_0}, \vec{y_0}, \vec{z_0})}$

$$I(O, G\{m\}) = \begin{pmatrix} \frac{9}{16} m h^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{9}{16} m h^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(\vec{x_0}, \vec{y_0}, \vec{z_0})}$$

Comme $I(O, G\{m\}) = \begin{pmatrix} m(y_G^2 + z_G^2) & -m x_G y_G & -m x_G z_G \\ -m y_G x_G & m(x_G^2 + z_G^2) & -m y_G z_G \\ -m z_G x_G & -m z_G y_G & m(x_G^2 + y_G^2) \end{pmatrix}$

$$I(G,S) = \begin{pmatrix} \frac{3}{20} mR^2 + \frac{3}{5} mh^2 - \frac{9}{16} mh^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{20} mR^2 + \frac{3}{5} mh^2 - \frac{9}{16} m h^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{10} mR^2 \end{pmatrix}$$

- Si le cône est creux $\rightarrow$ la répartition de la masse sera surfacique uniformément $\sigma = cte$.

$$dm = \sigma dS \quad \text{avec} \quad dS = r(z)\, d\theta\, dz = \frac{R z}{h} d\theta dz$$

$$m = \iint dm(P) = \sigma \int_0^h \frac{R z}{h} dz \int_0^{2\pi} d\theta = \sigma \, 2\pi \times \frac{R}{h} \times \frac{h^2}{2}$$

$$\boxed{m = \sigma \pi R h}$$

$$I_{zz} = \int_{P\in(S)} (x^2 + y^2)\, dm = \int_{P\in(S)} r^2(z)\, dm = \sigma \int_{P\in(S)} r^3(z)\, d\theta dz$$

$$= \sigma \frac{R^3}{h^3} \times \frac{h^4}{4} \times 2\pi$$

$$= \frac{mR^2}{2}$$

$$\boxed{I_{zz} = \frac{mR^2}{2}}$$

$$\int z^2 dm = \sigma \int_0^h \frac{R}{h} z^3 dz \int_0^{2\pi} d\theta = \sigma \frac{R}{h} \times \frac{h^4}{4} \times 2\pi$$
$$= \frac{\sigma R \times h^3 \times \pi}{2}$$
$$= \frac{m h^2}{2}$$

$$I_{xx} = I_{yy} = \frac{mR^2}{4} + \frac{mh^2}{2}$$

$$I(O,S) = \begin{pmatrix} \frac{mR^2}{4} + \frac{mh^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mR^2}{4} + \frac{mh^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mR^2}{2} \end{pmatrix}$$

$$I(O,S) = I(G,S) + I(O, G\{m\})$$

$$I(G,S) = I(O,S) - I(O, G\{m\})$$

$$I(O, G\{m\}) = \begin{pmatrix} \frac{4}{9} m h^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{9} m h^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ avec } \vec{OG} = \frac{2}{3} h \vec{z_0}$$

$$I(G,S) = \begin{pmatrix} \frac{mR^2}{4} + \frac{mh^2}{2} - \frac{4}{9} m h^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mR^2}{4} + \frac{mh^2}{2} - \frac{4}{9} m h^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mR^2}{2} \end{pmatrix}$$

III - Le torseur cinétique d'un système Σ en mvt / R = un repère donné.

On définit le torseur cinetique d'un systeme Σ en mvt /R par ses coordonnées ou ses elements de réduction qui est le vecteur quantité de mvt ou impulsion $\vec{P}(\Sigma/R)$ et son mvt qui est le moment cinétique $\vec{L}(\Sigma/R)$

Si le torseur est connu en un pt $A \in \Sigma$ alors $\mathcal{T}(A, \Sigma/R) = [\vec{P}(\Sigma/R), \vec{L}(A, \Sigma/R)]$

Il sera connu en n'importe quel pt C en utilisant la ppté d'antisymetrie

$\mathcal{T}(C, \Sigma/R) = [\vec{P}(\Sigma/R), \vec{L}(C, \Sigma/R)]$ $\quad \vec{L}(C, \Sigma/R) = \vec{L}(A, \Sigma/R) + \vec{P}(\Sigma/R) \wedge \vec{AC}$

1 - Le vecteur quantité de mvt ou impulsion

a) définition

Soit Σ un système en mvt/R.

La quantité de mvt de Σ/R est donné par :

i) Σ = un pt materiel M de masse m, animé d'une vitesse $\vec{V}(M/R)$

$$\vec{P}(\Sigma/R) = \vec{P}(M/R) = m\vec{V}(M/R)$$

ii) Σ = un systeme discret de pts materiels $M_1, \dots, M_n$ de masses respectives $m_1, \dots, m_n$ et vitesses respectives $\vec{V}(M_1/R), \dots, \vec{V}(M_n/R)$

$$\vec{P}(\Sigma/R) = \sum_i^n m_i \vec{V}(M_i/R)$$

iii) Σ = un système continu = un solide (S), de masse m

$$\vec{P}(S/R) = \int_{P\in(S)} \vec{V}(P\in S/R)\, dm(P)$$

$\sum_i \longrightarrow \int$

$m \longrightarrow dm$

P = centre de l'elmt de masse de (S)

b) Les pptés de $\vec{P}$

i) pour un système discret

$$\vec{P}(\Sigma/R) = m\vec{V}(G/R) \quad \text{où } m = \sum m_i \text{ et } G \text{ centre de masse de } (\Sigma)$$

Preuve

$$(m_1 + m_2 + \dots + m_n)\vec{OG} = m_1\vec{OM_1} + \dots + m_n\vec{OM_n}$$

$$(m_1 + m_2 + \dots + m_n)\left.\frac{d\vec{OG}}{dt}\right|_R = m_1\left.\frac{d\vec{OM_1}}{dt}\right|_R + \dots + m_n\left.\frac{d\vec{OM_n}}{dt}\right|_R$$

$$m\vec{V}(G/R) = \sum m_i \vec{V}(M_i/R).$$

ii) pour Σ = un solide (S)

$$\vec{P}(S/R) = \int \vec{V}(P\in S/R)\, dm = m\vec{V}(G\in S/R)$$

Preuve

$$m\vec{OG} = \int \vec{OP}\cdot dm(P)$$

$$m\left.\frac{d\vec{OG}}{dt}\right|_R = \int_{P\in(S)} \vec{V}(P\in S/R)\, dm(P)$$

$$m\, V(G/R) = \vec{P}(S/R).$$

iii) si $S = \bigcup_i S_i$

$$\vec{P}(S/R) = \sum \vec{P}(S_i/R).$$

iv) $\vec{P}(\Sigma/R_G) = \vec{P}(S/R_G) = \vec{0}$

R_G = repère barycentrique = repère Koeining = $R_b(G, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

C'est le repère d'origine le centre de masse G et dont les trois axes st // aux axes du repère fixe.

$$(m_1 + \dots + m_n)\,\vec{OG} = \sum m_i \vec{OM_i}$$

Si $O' = G$ $\quad \sum m_i \vec{GM_i} = \vec{0} \rightarrow \sum m_i \frac{d(\vec{GM_i})}{dt}\Big/_R = \sum m_i \frac{d(\vec{GM_i})}{dt}\Big/_{R_G}$

$$= \sum m_i \vec{V}(M_i/R_G)$$

$$\sum m_i \vec{V}(M_i/R_G) = \vec{P}(\Sigma/R_b) = m\vec{V}(G/R_b) = m \frac{d\vec{GG}}{dt}\Big/_{R_b} = \vec{0}.$$

2 _ Le vecteur moment cinétique de Σ en mvt /R

a) définition

Soit Σ un système en mvt /R.

On définit le moment cinétique de Σ dans son mvt /R, au C qq par :

i) Σ = un pt materiel M, de masse m et de vitesse $\vec{V}(M/R)$.

$$\vec{L}(C, M/R) = \vec{CM} \wedge m\vec{V}(M/R) = \vec{CM} \wedge \vec{P}(M/R)$$

ii) Σ = un système discret de N pts materiels

$$\vec{L}(C, \Sigma/R) = \sum_i \vec{L}(C, M_i/R) = \sum_i \vec{CM_i} \wedge \vec{P}(M_i/R)$$

iii) $$\vec{L}(C, \Sigma/R) = \int \vec{CP} \wedge \vec{V}(P)\,dm = \sum_i \left[\vec{CM_i} \wedge m_i \vec{V}(M_i/R)\right].$$

b) Les ppts de $\vec{L}$

i) $S = \bigcup_i S_i$

$$\vec{L}(C, S/R) = \sum_i \vec{L}(C, S_i/R).$$

ii) la ppté d'antisymetrie est vérifiée

iii) $\vec{L}(C, S/R_b) = \vec{L}(G, S/R_b)$

Preuve

$$\vec{L}(C, S/R_b) = \int_{P \in (S)} \vec{CP} \wedge \vec{V}(P \in S/R_b)\,dm.$$

$$= \int \vec{CG} \wedge \vec{V}(P \in S/R_b)\,dm + \int \vec{GP} \wedge \vec{V}(P \in S/R_b)\,dm$$

$$\vec{L}(C, S/R_0) = \vec{CG} \wedge \underbrace{\int \vec{V}(P \in S/R_0)\, dm}_{0} + \vec{L}(G, S/R_0)$$

iv) Théorème

$$\vec{L}(C, S/R) = I(A,S)\,\vec{\Omega}_{S/R} + m\,\vec{CG} \wedge \vec{V}(A \in S/R) + \vec{CA} \wedge (\vec{\Omega}_{S/R} \wedge \vec{AG}).$$

Preuve

C un pt qq de l'espace

$A \in (S)$, $I(A,S)$, G centre de masse de S).

$\vec{\Omega}$ = vitesse de rotation instantanée de S/R.

$$\vec{L}(C, S/R) = \int \vec{CM} \wedge \vec{V}(M \in S/R)\, dm.$$

$$A \in (S) \Rightarrow \vec{V}(M \in S/R) = \vec{V}(A \in S/R) + \vec{\Omega}_{S/R} \wedge \vec{AM}$$

$$\vec{L}(C, S/R) = \underbrace{\int \underbrace{\vec{CM}}_{\vec{CG}+\vec{GM}} \wedge \vec{V}(A \in S/R)\, dm}_{\vec{CG} \wedge \vec{V}(A \in S/R) \int dm + \left(\int \vec{GM}\, dm\right) \wedge \vec{V}(A \in S/R)} + \underbrace{\int \underbrace{\vec{CM}}_{\vec{CA}+\vec{AM}} \wedge (\vec{\Omega}_{S/R} \wedge \vec{AM})\, dm}_{\circledast}$$

$$\underbrace{\vec{CG} \wedge \vec{V}(A \in S/R) \underbrace{\int dm}_{m} + \left(\underbrace{\int \vec{GM}\, dm}_{0}\right) \wedge \vec{V}(A \in S/R)}_{m\,\vec{CG} \wedge \vec{V}(A \in S/R)}$$

$$\circledast = \vec{CA} \wedge \int \vec{\Omega}_{S/R_0} \wedge (\vec{AG} + \vec{GM})\, dm + \underbrace{\int \vec{AM} \wedge (\vec{\Omega}_{S/R_0} \wedge \vec{AM})\, dm}_{I(A,S)\,\vec{\Omega}_{S/R}}.$$

$$I(A,S)\,\vec{\Omega}_{S/R} + \vec{CA} \wedge (\vec{\Omega}_{S/R} \wedge \vec{AG}) + \vec{CA} \wedge (\vec{\Omega}_{S/R} \wedge \underbrace{\int \vec{GM}\, dm}_{0}).$$

$\forall C \in \mathcal{E}$

$$\boxed{\vec{L}(C, S/R) = I(A,S)\,\vec{\Omega}_{S/R} + m\,\vec{CG} \wedge \vec{V}(A \in S/R) + m\,\vec{CA} \wedge (\vec{\Omega}_{S/R} \wedge \vec{AG})}$$

Les cas particuliers importants :

- Si $C = A \in (S)$

$$\vec{L}(A, S/R) = I(A,S)\,\vec{\Omega}_{S/R} + m\,\vec{CG} \wedge \vec{V}(A \in S/R)$$

- Si $C \equiv A \in (S)$ et fixe dans R

$$\vec{L}(A, S/R) = I(A,S)\,\vec{\Omega}_{S/R}.$$

- Si $C \equiv G \equiv A$

$$\vec{L}(G, S/R) = I(G,S)\,\vec{\Omega}_{S/R}$$

- Si $C \equiv G$

$$\vec{L}(G, S/R) = I(A,S)\,\vec{\Omega}_{S/R} + m\,\vec{CA} \wedge (\vec{\Omega}_{S/R} \wedge \vec{AG})$$

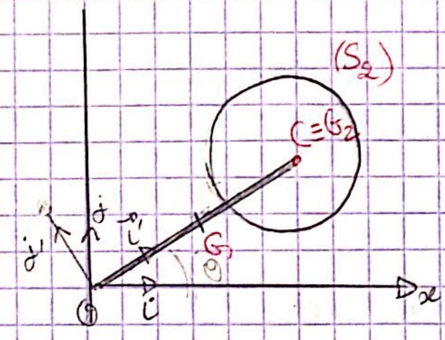
→ Application.

Soit (S) un solide fournit par deux elmts solidaires $(S_1) \cup (S_2) = (S)$

(S_1) = tige de longueur $\ell \longrightarrow m_1$

(S_2) = disque de centre C et de rayon a, masse m_2

$$\vec{\Omega}_{(S_1)/R} = \vec{\Omega}_{S_2/R} = \dot{\theta}\vec{k}$$



$\odot k$ $\odot z$ $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

$\mathcal{C}$ cinétique $(O, S/R)$?

$$\mathcal{C}\text{inétique}(O, S/R) = \mathcal{C}\text{inétique}(O, S_1/R) + \mathcal{C}\text{inétique}(O, S_2/R)$$

$$\mathcal{C}\text{inétique}(O, S_1/R) = [\vec{P}_1(S_1/R), \vec{L}(O, S_1/R)$$

$$\vec{P}_1(S, R) = m_1 \vec{V}(G_1/R), \quad \vec{OG_1} = \frac{\ell}{2}\vec{i}'$$

$$\vec{V}(G_1/R) = \frac{d\vec{OG_1}}{dt} = \frac{\ell}{2}\dot{\theta}\, \vec{j}'$$

$$\boxed{\vec{P}_1(S, R) = m_1 \frac{\ell}{2}\dot{\theta}\,\vec{j}'}$$

$$\vec{L}(O, S/R) = I(O, S_1)\, \vec{\Omega}_{S/R}$$

$$I(O, S_1) = I(G_1, S_1) + I(O, G_1\{m_1\})$$

$$I(G_1, S_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m_1\ell^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m_1\ell^2}{12} \end{pmatrix}$$

$I(O, G_1\{m_1\})$?

$$\vec{OG_1} = \frac{\ell}{2}\vec{i}' = \left| \begin{array}{l} \frac{\ell}{2} = x_G \\ 0 = y_G \\ 0 = z_G \end{array} \right.$$

$$I(O, \theta\{m_1\}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m_1 \ell^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m_1 \ell^2}{4} \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow I(O, S_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m_1 \ell^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m_1 \ell^2}{3} \end{pmatrix}$$

$$\vec{L}(O, S_1|R) = I(O, S_1)\, \vec{\Omega}_{S_1|R} = \frac{m_1 \ell^2}{3} \dot{\theta} \vec{k}$$

$$\mathcal{T}_{\text{cinétique}}(O, S_1|R) = \left[\vec{P}(S_1|R) = \frac{m_1 \ell^2}{3} \dot{\theta} \vec{k},\ \vec{L}(O, S_1|R) = \frac{m_1 \ell^2}{3} \dot{\theta} \vec{k} \right]$$

$$\mathcal{T}_{\text{cinétique}}(O, S_2|R) = \left[\vec{P}(S_2|R),\ \vec{L}(O, S_2|R) \right]$$

$$\vec{P}(S_2|R) = m_2 \vec{V}(C|R) \quad ; \quad \vec{OC} = \ell \vec{i}$$

$$\vec{V}(C|R) = \ell \dot{\theta} \vec{j}'$$

$$\vec{P}(S_2|R) = m_2 \ell \dot{\theta} \vec{j}'$$

$$\vec{L}(O, S_2|R) = \vec{L}(G_2, S_2|R) + \vec{P}(S_2|R) \wedge \vec{G_2 O}$$

$$G_2 \equiv C$$

$$\vec{L}(C, S|R) = I(A, S)\, \vec{\Omega}(S|R) + m \vec{CG} \wedge \vec{V}(A \in S|R) + m \vec{CA} \wedge (\vec{\Omega}_{S|R} \wedge \vec{AG})$$

$$A \equiv G$$

$$\vec{L}(C, S|R) = I(G, S)\, \vec{\Omega}_{S|R} + m \vec{CG} \wedge \vec{V}(G \in S|R)$$

$$= L(G, S) + m \vec{V}(G|R) \wedge \vec{GC}$$

$$= \text{ppté d'antisymetrie de } L$$

$$\vec{L}(G_2, S_2|R) = I(G_2, S_2)\, \vec{\Omega}_{S_2|R} \qquad \vec{L}(O,S) = I(O,S)\, \vec{\Omega}_{S|R}$$

$$= \begin{array}{c} \\ \\ \\ \vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \end{array} \begin{pmatrix} \frac{m_2 a^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m_2 a^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m_2 a^2}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}$$

$$\vec{L}(G_2, S_2|R) = \frac{m_2 a^2 \dot{\theta}}{2} \vec{k}$$

$$\vec{P}(S_2|R) \wedge \vec{G_2 O} = m_2 \ell \dot{\theta} \vec{j}' \wedge (-\ell \vec{i}') = m_2 \ell^2 \dot{\theta} \vec{k}$$

$$\vec{L}(O, S_2|R) = \left[\frac{m_2 a^2}{2} + m_2 \ell^2 \right] \dot{\theta} \vec{k}$$

$\mathcal{T}_{cinétique}(O, S_2|R) = [\vec{P}^0(S_2|R) = m_2 \ell \dot{\theta} \vec{j}^{0}_{1} ; \vec{L}^0(O, S_2|R) = [\frac{m_2 a^2}{2} + \ell m_2] \dot{\theta}\vec{k}]$

$\mathcal{T}_{cinétique}(O, S|R) = [\vec{P}^0(S|R), \vec{L}^0(O, S|R)]$

$\vec{P}^0(S|R) = \vec{P}^0(S_1|R) + \vec{P}^0(S_2|R) = (\frac{m_1 \ell}{2} + m_2 \ell)\dot{\theta}\vec{j}^{0}_{1}$

$\vec{L}^0(O, S|R) = \vec{L}^0(O, S_1|R) + \vec{L}^0(O, S_2|R) = [\frac{m_1 \ell^2}{3}\dot{\theta} + (\frac{m_2 a^2}{2} + m_2 \ell^2)\dot{\theta}]\vec{k}$

IV Le torseur dynamique d'une sphère Σ en mvt R = repère donné

1 - Definition

Le torseur dynamique d'un systeme Σ en mvt R est defini par ses coordonnés ou ses elmts de reduction, son vecteur c'est la resultante dynamique $\vec{\mathcal{J}}^0$ et son moment dynamique $\vec{D}^0(\Sigma|R)$

En pt $C \in \Sigma$

$\mathcal{T}_D(C, \Sigma|R)$ = torseur dynamique $= [\vec{\mathcal{J}}^0(\Sigma|R), \vec{D}^0(C, \Sigma|R)]$

2 La resultante dynamique $\vec{\mathcal{J}}^0(\Sigma|R)$

a- Définition

- i) Soit Σ = un pt materiel M, de masse m et d'acceleration $\vec{\gamma}^0(M|R)$

$$\vec{\mathcal{J}}^0(\Sigma|R) = m\vec{\gamma}^0(M|R)$$

- ii) Σ = un systeme discret de N points materiels $M_1, \dots, M_N$ de masse respectifes $m_1, \dots, m_N$

$$\vec{\mathcal{J}}^0(\Sigma|R) = \sum_i m_i \vec{\gamma}^0(M_i|R)$$

- iii) Σ = un systeme continu = solide (S)

$$\vec{\mathcal{J}}^0(S|R) = \int \vec{\gamma}^0(P \in S|R)\, dm(P)$$

$\sum_i \longrightarrow \int$

$m \longrightarrow dm$

b - Les pptes de $\vec{\gamma}$

i) $S = \bigcup_i S_i$

$$\vec{\gamma} = \sum_i \vec{\gamma}(S_i|R)$$

ii) Σ = système discret

$$\vec{\gamma} = \sum_i m_i \vec{\gamma}(M_i|R) = m\vec{\gamma}(G|R)$$ où $m = \sum_i m_i$ et G c.m de $M_1, \dots, M_n$.

En effet $\vec{P}(\Sigma|R) = \sum m_i \vec{V}(M_i|R) = m\vec{V}(G, R)$.

$$\frac{d\vec{P}}{dt}(\Sigma|R) = m\frac{d\vec{V}(G|R)}{dt} = m\vec{\gamma}(G, R) = \vec{\gamma}(\Sigma|R).$$

$$\vec{\gamma}(\Sigma|R) = \frac{d\vec{P}}{dt}\Big|_R = m\vec{\gamma}(G|R)$$

iii) Σ = un solide S

$$\vec{\gamma}(S|R) = \frac{d\vec{P}(S|R)}{dt} = m\vec{\gamma}(G|R)$$

iv) Σ = un système discret continu

$$\vec{\gamma}(\Sigma|R_b) = m\vec{\gamma}(G, R_b) = \vec{0}$$

3_ Le moment dynamique

a) Definition

Soit Σ un système en mvt /R et C un pt qq de Σ

- i) Σ = un pt materiel m

$$\vec{D}(C, m|R) = \vec{Cm} \wedge m\vec{\gamma}(m|R) = \vec{Cm} \wedge \vec{\gamma}(m|R)$$

- ii) Σ = un système discret de N pts materiels $M_1, \dots, M_N$ de masse respective $m_1, \dots, m_N$

$$\vec{D}(C, \Sigma|R) = \sum \vec{CM_i} \wedge m_i\vec{\gamma}(M_i|R)$$

- iii) Σ = un système continu = solide (S)

$$\vec{D}(C, S|R) = \int_{P \in (S)} \vec{CP} \wedge \vec{\gamma}(P \in S|R)\, dm(P)$$

où P centre d'inertie de masse de (S).

~~b) les p~~

Pptés

- i) Si $S = \cup S_i$

$$\vec{D}(C, S/R) = \sum \vec{D}(C, S_i/R).$$

- ii) La propriété d'antisymétrie est tjr valable.
- iii) Relation entre $\vec{D}$ et $\frac{d\vec{L}}{dt}$

$$\vec{L}(C, S/R) = \int_{P\in(S)} \vec{CP} \wedge \vec{V}(P\in S/R)\, dm.$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \int \frac{d\vec{CP}}{dt} \wedge \vec{V}(P\in S/R)\, dm + \int \vec{CP} \wedge \frac{d\vec{V}}{dt}(P\in S/R)\, dm(P)$$

$$= \int \left[\frac{d\vec{OP}}{dt} - \frac{d\vec{OC}}{dt}\right] \wedge \vec{V}(P\in S/R)\, dm + \vec{D}(C, S/R).$$

$$= \vec{V}(C / R) \wedge \vec{V}(P\in S/R)\, dm(P) + \vec{D}(C, S/R).$$

$$= -\vec{V}(C/R) \wedge m\vec{V}(G/R) + \vec{D}(C, S/R).$$

$$D(C, S/R) = \frac{d\vec{L}}{dt} + \vec{V}(C, R) \wedge m\vec{V}(G/R).$$

Cas particulier important

- Si C est un pt fixe dans R ou $G \equiv C$

Alors $\vec{D}(C, S/R) = \frac{d\vec{L}(C, S/R)}{dt}\Big/_R.$

et comme on a toujours

$$\vec{\gamma}(S/R) = \frac{d\vec{P}(S/R)}{dt}\Big/_R.$$

Alors $\mathcal{T}_D(C, S/R) = \frac{d\,\mathcal{T}_{cinetique}(C, S/R)}{dt}\Big/_R$

- Reprenons l'exemple précedent

$$\vec{P}(S/R) = \left(\frac{m_1}{2} + m_2\right) l\dot{\theta}\,\vec{j}$$

$$\vec{L}(S/R) = \left[\frac{m_1 l^2}{3} + \frac{m_2 a^2}{2} + m_2 l^2\right] \dot{\theta}\,\vec{k}.$$

$$\mathcal{T}_D(O, S/R) = \frac{d\,\mathcal{T}_{cinétique}(O, S/R)}{dt}$$ O est un pt fixe dans R

$$\vec{\gamma}(S/R) = \frac{d\vec{P}(S/R)}{dt} = \left(\frac{m_1}{2} + m_2\right) l\ddot{\theta}\,\vec{j} - \left(\frac{m_1}{2} + m_2\right) l\dot{\theta}^2\,\vec{i}$$

$$\vec{D}(O, S/R) = \frac{d\vec{L}(O, S/R)}{dt}$$

$$D(O, S/R) = \left[\frac{m_1 l^2}{3} + \frac{m_2 a^2}{2} + m_2 l^2\right] \ddot{\theta}\,\vec{x}$$

V L'energie cinétique d'un système Σ en mvt /R

a) definition

Soit Σ un système en mvt / R = repère qq

i) Σ = un pt materiel M, de masse m et de vitesse $\vec{V}(M/R)$

$$T(\Sigma/R) = \frac{1}{2} m V^2 (M/R)$$

ii) Σ = un système discret de N pts materiels $M_1, \dots, M_N$

$$T(\Sigma/R) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i V^2(M_i/R)$$

iii) Σ = un système continu = solide S.

$$T(S/R) = \frac{1}{2}\int_{M\in(S)} V^2(P\in S/R)\, dm(P) \qquad \sum_i \longrightarrow \int \quad m_i \quad dm.$$

b) Les propriétés de T

i) $S = \bigcup_i S_i \longrightarrow \boxed{2T(S/R) = \sum_i 2T(S_i/R)}$

ii) $T(\Sigma/R) = T(\Sigma/R_G) + \frac{1}{2} m V^2 (G/R)$

où $R_G = R_K$ = repère barycentrique ou repère de koening.

Preuve

$\vec{V}(M_i/R) = \vec{V}(M_i/R_G) + \vec{V}(M_i^* \in R_G/R)$

$\vec{V}(M_i^* \in R_G/R) = \vec{V}(G/R) + \underbrace{\vec{\Omega}_{R_G/R}}_{=\vec{0}} \wedge \vec{GM_i} = \vec{V}(G/R)$

$\vec{0}$ car R_G est en translat° /R.

$\vec{V}(M_i/R) = \vec{V}(M_i/R_G) + \vec{V}(G/R)$

$2T(\Sigma/R) = \sum_i m_i \vec{V}(M_i/R)\cdot\vec{V}(M_i/R) = \sum_i m_i \left(\vec{V}(M_i/R_G) + \vec{V}(G/R)\right)\cdot\left(\vec{V}(M_i/R) + \vec{V}(G/R)\right)$

$= \sum_i m_i V^2(M_i/R_G) + \sum_i m_i V^2(G/R) + 2\underbrace{\sum_i m_i \vec{V}(M_i/R_G)}_{\vec{0} = m\vec{V}(G/R_G)}\cdot\vec{V}(G/R)$

$2T(\Sigma/R) = 2T(\Sigma/R_G) + mV^2(G/R)$

car $m\vec{OG} = \sum m_i \vec{OM_i}$

$\vec{0} = \sum m_i \vec{GM_i}$

$\vec{0} = \sum m_i \left.\frac{d\vec{GM_i}}{dt}\right|_{R_G}$

iii) $2T(S/R) = \left(\mathcal{T}_V(C, S/R), \mathcal{T}_{cinétique}(C, S/R)\right)$ = comoment ou produit scalaire des 2 torseurs cinématique et cinétique avec C un pt qq $\in S$

$\mathcal{T}_V(C) = [\vec{\Omega}_{S/R}, \vec{V}(C \in S/R)]$

$\mathcal{T}_{cinétique}(C, S/R) = [\vec{P}(S/R), \vec{L}(C, S/R)]$

$$\begin{cases} 2T(S/R) = \vec{P}(S/R) \cdot \vec{V}(C \in S/R) + \vec{\Omega}_{S/R} \cdot \vec{L}(C, S/R) \\ 2T(S/R) = m\vec{V}(G/R) \cdot \vec{V}(C \in S/R) + \vec{\Omega}_{S/R} \cdot \vec{L}(C, S/R) \end{cases}$$

Preuve

$$2T(S/R) = \int_{M \in (S)} V^2(M \in S/R)\, dm = \int_{M \in (S)} \vec{V}(M \in S/R) \cdot \vec{V}(M \in S/R)\, dm.$$

Soit $C \in (S)$

$$\vec{V}(M \in S/R) = \vec{V}(C \in S/R) + \vec{\Omega}_{S/R} \wedge \vec{CM}$$

$$2T(S/R) = \vec{V}(C \in S/R) \cdot \underbrace{\int_{M \in (S)} \vec{V}(M \in S/R)\, dm}_{m\vec{V}(G/R)} + \underbrace{\int_{M \in (S)} (\vec{\Omega}_{S/R} \wedge \vec{CM}) \cdot \vec{V}(M \in S/R)\, dm}_{\vec{\Omega}_{S/R} \cdot \underbrace{\int_{M \in (S)} \vec{CM} \wedge \vec{V}(M \in S/R)\, dm}_{\vec{L}(C, S/R)}}$$

CQFD

Cas particulier important pour calculer l'energie cinetique d'un solide (S) en mvt /R.

i) Si le solide (S) possède un pt fixe dans R (exemple le pt $A \in (S)$)

$$\boxed{2T(S/R) = \vec{\Omega}_{S/R} \cdot \vec{L}(A, S/R)}$$

ii) Si le solide (S) n'a pas de point fixe dans R on prend $C \equiv G$ c'est le th de Koening.

$$2T(S/R) = mV^2(G/R) + \vec{\Omega}_{S/R} \cdot \vec{L}(G, S/R)$$

or $\vec{L}(G, S/R) = \vec{L}(G, S/R_G) = I(G, S)\, \vec{\Omega}_{S/R_G}$

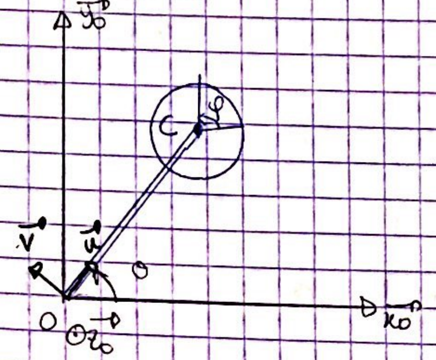
$$2T(S/R) = mV^2(G/R) + \underbrace{{}^t(\vec{\Omega}_{S/R})\, I(G, S)\, \vec{\Omega}_{S/R}}_{2T(S/R_G)}$$

Scanné avec CamScanner

iii) Si le solide (S) a un pt A fixe dans R et possède une seule rotation par rapport à un axe passant par A si en plus cet axe est un axe principale d'inertie de (S) alors :

$$\boxed{2T(S/R) = I_{/\text{à cet axe passant A}}\ \Omega^2_{S/R}}$$

Application



$S = S_1 \cup S_2$

(S_1) = tige $(m_1, 2\ell)$

$\vec{\Omega}_{S_1/R_0} = \dot\theta\, \vec{z_0}$

(S_2) = disque (C, a)

$\vec{\Omega}_{S_2/R_0} = \vec{\Omega}_{S_2/R_c} = \dot\varphi\, \vec{z_0}$

$2T(S/R_0)$?

$T(S/R_0) = T(S_1/R_0) + T(S_2/R_0)$

$2T(S_1/R_0) = \vec{\Omega}(S_1/R_0)\cdot\vec{L}(O, S_1/R_0)$ car O est fixe dans R_0.

$\vec{L}(O, S_1/R_0) = I(O, S_1)\, \vec{\Omega}_{S_1/R_0}$ et $O \in S_1$

$I(O, S_1) = I(G_1, S_1) + I(O, G_1\{m_1\})$

$\vec{OG_1} = \ell\vec{u} = \begin{vmatrix} x_{G_1} = \ell \\ y_{G_1} = 0 \\ z_{G_1} = 0 \end{vmatrix}$

$$I(O, S_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m_1\ell^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m_1\ell^2}{3} \end{pmatrix}_{\vec u, \vec v, \vec{z_0}} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_1\ell^2 & 0 \\ 0 & 0 & m_1\ell^2 \end{pmatrix}_{\vec u, \vec v, \vec{z_0}}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{3}m_1\ell^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3}m_1\ell^2 \end{pmatrix}_{\vec u, \vec v, \vec{z_0}}$$

$$\vec{L}(O, S_1/R_0) = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot\theta \end{pmatrix} = \frac{4}{3}m_1\ell^2\dot\theta\,\vec{z_0}$$

$$2T(S_1/R_0) = \vec{\Omega}_{S_1/R_0}\cdot\vec{L}(O, S_1/R_0) = \frac{4}{3}m_1\ell^2\dot\theta^2$$

Scanné avec CamScanner

(S_2) ne possède pas de pt fixe dans R_0, on utilise alors le th de Koening par le calcul de T

$$2T(S_2|R_0) = m_2 V^2(G_2|R_0) + \vec{\Omega}_{S_2/R_0} \cdot \vec{L}(G, S_2|R_0)$$

$$\vec{OG_2} = \vec{OC} = 2\ell \vec{u}$$

$$\vec{V}(G_2|R_0) = \frac{d\vec{OG}}{dt}\Big|_{R_0} = 2\ell\dot{\theta}\,\vec{v}$$

$$V^2(G_2|R_0) = (2\ell\dot{\theta})^2 = 4\ell^2\dot{\theta}^2$$

$$\vec{L}(G_2, S_2|R_0) = \vec{L}(C, S_2|R_0) \underset{\substack{ou\\R_G}}{} = I(C, S_2)\,\vec{\Omega}_{S_2|R_0}$$

$$= \begin{array}{c} \\ \\ \\ \vec{u}, \vec{v}, \vec{z_0} \end{array} \begin{pmatrix} \frac{m_2 a^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m_2 a^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{ma^2}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{ma^2}{2}\dot{\varphi}\,\vec{z_0}$$

$$2T(S_2|R_0) = 4 m_2 \ell^2 \dot{\theta}^2 + \frac{m a^2}{2}\dot{\varphi}^2$$

$$\boxed{2T(S|R_0) = \frac{4}{3} m_1 \ell^2 \dot{\theta}^2 + 4 m_2 \ell^2 \dot{\theta}^2 + \frac{m_2 a^2}{2}\dot{\varphi}^2}$$

Torseur force $\mathcal{T}_{force}(\Sigma|R)$.

On définit le torseur force d'un système Σ en mvt/R par ses coordonnées ou ses elmts de réductions

Son vecteur c'est la resultante des forces $\vec{F}_{résultante}$ mesurée dans R et son moment c'est le moment des forces $\vec{m}(\vec{F}_{resultante})$ en un pt C qq $\in \mathcal{E}$

$$\mathcal{T}_{force}(C, \Sigma|R) = \left[\vec{F}_{resultante}, \vec{m}(C, \vec{F}_{résultante})\right]$$

a) La force resultante $\vec{F}_{resultante}$

α) Notion de force

Toute force qui s'exerce sur un systeme Σ se traduit par tt effort capable de le deplacer ou de le perturber ou de le déformer.

i) Σ = un pt materiel m

Les forces qui agissent sur m par l'univers ({m} sur {m} sont des forces exterieures

La nature de ces forces : - forces à distance
- forces de contact.

ii) Σ = systeme discret de N pts materiels $m_1, \dots, m_N$

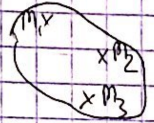
Les forces qui peuvent agir sur Σ sont :

- Les forces exterieures

Chaque particule m_i subira une force exterieur $\vec{f}_{i_{ext}}$, c'est la force exercée par l'univers / Σ sur m_i

$$\vec{F}_{ext\ résultante} = \sum_{i=1}^{N} \vec{f}_{i_{ext}}$$

- Les forces interieures ou forces intermediaires entre les particules du m̂ systeme



$$\vec{f}_{1int} = \vec{f}_{2\to1} + \vec{f}_{3\to1} = \sum_{\substack{j=2 \\ j\neq1}}^{3} \vec{f}_{j\to1}$$

$$\vec{f}_{2int} = \vec{f}_{1\to2} + \vec{f}_{3\to2}$$

$$\vec{f}_{3} = \vec{f}_{1\to3} + \vec{f}$$

$$\vec{f}_{int\ total} = \sum_{i=1}^{3} \vec{f}_{i_{int}} = \vec{f}_{2\to1} + \vec{f}_{3\to1} + \vec{f}_{1\to2} + \vec{f}_{1\to3} + \vec{f}_{3\to2} + \vec{f}_{2\to3}$$

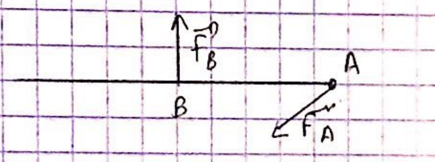
En généralisant $\vec{f}_{i_{int}} = \sum_{\substack{j\neq i \\ j=1}}^{N-1}$

$$\vec{F}_{int\ résultante} = \sum_{i=1}^{N} \vec{f}_{i_{int}} = \sum_i \sum_{j\neq i} \vec{f}_{j\to i} = \sum_i \sum_{j\neq i} \vec{f}_{ij}$$

$$\vec{f}_{ij} = \vec{f}(m_j \in \Sigma / m_i \to m_i) = \vec{f}_{j\to i}$$

$$\vec{F}_{resultante} = \vec{F}_{ext\ resultante} + \vec{F}_{int\ resultante}$$

iii) Σ = systeme continue



Les forces qui peuvent agir sur Σ sont :

- Les forces exterieures

il y a les forces à distance et les forces de contact

→ Forces de contact

$$\vec{F}_{resultante\ ext} = \sum_i \vec{f}_{i_{ext}}$$ chaque $\vec{f}_i$ a un pt d'app ou un support

Scanné avec CamScanner

Les forces interieurs ou les forces d'interactions entre les particules du même systeme

Si le solide globale est indéformable

Pour le solide, on a des forces réparties en surface qui s'applique sur ce dernier. Elles sont de la forme

$$\boxed{\vec{F}_{repartie} = \int_{M\in(S)} \vec{f}(M)\, dm(M) = \text{force massique}} \qquad \vec{f}(M) = \frac{d\vec{F}}{dm}$$

$$\boxed{\vec{P} = \int_{M\in(S)} \vec{g}\, dm(M)} \qquad g_0 = 9{,}81\ m/s^2$$

$$g_0 = \frac{G M_T}{R_T^2}$$

$$g(z) = \frac{G M_T}{(R_T + z)^2}$$

$$\frac{g(z)}{g_0} = \frac{R_T^2}{(R_T+z)^2} \Rightarrow g(z) = \frac{g_0}{\left(1+\frac{z}{R_T}\right)^2} \qquad z \ll R_T \rightarrow g(z) \simeq g_0$$

$$\vec{P} = \int \vec{g}\, dm(M) = \int \vec{g_0}\, dm = \vec{g_0} \int dm = m\vec{g_0}$$

Pour les solides indeformables $\rightarrow \vec{F}_{\substack{resultante\\int}} = \vec{0}$

Pour le solide

$$\vec{F}_{resultante} = \sum_i \vec{f}_{\substack{iext\\localisée}} + \sum \sum f_{i_{int}} + \vec{F}_{\substack{résultante\\repartie}}$$

b) Moment des forces appliqués à Σ dans R en pt C qq

i) Σ = un pt materiel M

$$\vec{F}_{resultante} = \vec{F}_{\substack{resultante \\ localisée \\ ext}} = \sum_i \vec{f}_{iext} \quad \text{appliqué à } M \text{ dans } R \text{ : galilien}$$

$$\vec{M}(C, \vec{F}_{resultante}) = \vec{CM} \wedge \sum_i \vec{f}_{iext} = \vec{CM} \wedge \vec{F}_{résultant} = \sum (\vec{CM} \wedge \vec{f}_{iext})$$

ii) Σ = un systeme discret de N pts materiels $M_1, \ldots, M_N$

$$\vec{F}_{resultante} = \vec{F}_{\substack{résultante \\ ext}} + \vec{F}_{\substack{résultante \\ int}} = \sum \vec{f}_{i_{ext}} + \sum \vec{f}_{i_{int}}.$$

qui s'applique à Σ dans R = galilien

$$\vec{M}(C, \vec{F}_{resultante}) = \sum_i (\vec{CM_i} \wedge \vec{f}_{iext}) + \sum_i (\vec{CM_i} \wedge \vec{f}_{iint})$$

$$= \sum_i (\vec{CM_i} \wedge \vec{f}_{iext}) + \sum_i \sum_{j \neq i} (\vec{CM_i} \wedge \vec{f}_{j \to i})$$

iii) Σ = un solide indeformable

$$\vec{F}_{resultante} = \vec{F}_{\substack{resultante \\ ext}} + \underbrace{\vec{F}_{\substack{resultante \\ int}}}_{0 \text{ si } (S) \text{ indeformable}} + \vec{F}_{\substack{résultante \\ repartie}}.$$

appliqué à Σ dans R supposé galilien.

$$\vec{M}(C, \vec{F}_{resultante}) = \sum (\vec{CM_i} \wedge \vec{f}_{\substack{iext \\ localisée}}) + \int_{M \in (S)} \vec{CM} \wedge \vec{f}(M)\, dm.$$

8) Enoncé des theoremes généraux

Dans tout referentiel espace-temps R galilien, on a le torseur dynamique d'un systeme en mvt / R est egal au torseur force appliqué à Σ dans ce m̂ repère

$$\mathcal{T}_D(\Sigma/R) = \mathcal{T}_{force}(\Sigma/R) \quad \text{en un pt C qq} \in \mathcal{E} \quad \mathcal{T}_D(C, \Sigma/R) = \mathcal{T}_{force}(C, \Sigma/R)$$

$$\mathcal{T}_D(C, \Sigma/R) = [\vec{\gamma}(\Sigma/R), \vec{D}(C, \Sigma/R)]$$

$$\mathcal{T}_{Force}(C, \Sigma/R) = [\vec{F}_{resultante}, \vec{M}(C, \vec{F}_{resultante})]$$

$$\to \begin{cases} \vec{\gamma}(\Sigma/R) = \vec{F}_{resultante} \\ \vec{D}(C, \Sigma/R) = \vec{M}(C, \vec{F}_{resultante}) \end{cases}$$

avec $\vec{\gamma}(\Sigma/R) = \frac{d\vec{P}}{dt}/R$

$\vec{D}(C, \Sigma/R) = \frac{d\vec{L}(C, \Sigma/R)}{dt} + m\vec{V}(C/R) \wedge \vec{V}(G$

on deduit

- Le theoreme de la 2e loi de Newton ou PFD appliqué à Σ dans R

$$\frac{d\vec{P}}{dt/R} = \vec{F}_{resultante} = m\,\vec{\gamma}(G/R) \qquad \text{avec } G \text{ c.m de } \Sigma$$

- Le theoreme du moment cinétique appliqué à Σ/R au pt C

$$\vec{D}(C,\Sigma/R) = \frac{d\vec{L}(C,\Sigma/R)}{dt/R} + m\vec{V}(C/R)\wedge\vec{V}(G/R)$$
$$= \vec{M}(C, \vec{F}_{resultante})$$

Dans tout repère espace-temps R' non galilien,

$$\mathcal{T}_D(C,\Sigma/R') = \mathcal{T}_{Force}(C, \vec{F}_{\substack{resultantes \\ reelles\ mesurées \\ dans\ R\ galilien}}) - \mathcal{T}_{De}(C,\Sigma/R) - \mathcal{T}_{DC}(C,\Sigma/R)$$

Σ = systeme discret

$$\mathcal{T}_D(C,\Sigma/R') = \left[\Sigma m_i\vec{\gamma}(m_i/R'),\ \Sigma\,\vec{Cm_i}\wedge m_i\vec{\gamma}(m_i/R')\right]$$

$$\mathcal{T}_{Force}(C,\Sigma/R) = \left[\underbrace{\vec{F}_{resultante}}_{\vec{F}_{resultante\ ext} + \vec{F}_{resultante\ int}},\ \vec{M}(C, \vec{F}_{resultante})\right]$$

$$\mathcal{T}_e(C,\Sigma/R) = \left[\Sigma m_i\vec{\gamma}_e(m_i^*\in R'/R),\ \Sigma\,\vec{Cm_i}\wedge m_i\vec{\gamma}_e(m_i^*\in R'/R)\right]$$

avec $\vec{\gamma}_e(M^*\in R'/R) = \vec{\gamma}(O'/R) + \frac{d\vec{\Omega}_{R'/R}}{dt/R}\wedge\vec{O'm_i}$
$$+ \vec{\Omega}_{R'/R}\wedge(\vec{\Omega}_{R'/R}\wedge\vec{O'm_i})$$

$$\mathcal{T}_{DC}(C,\Sigma/R) = \left[\Sigma m_i\vec{\gamma}_c(m_i/R),\ \Sigma\,\vec{Cm_i}\wedge m_i\vec{\gamma}_c(m_i/R)\right]$$

On deduit l'expression des théorèmes precedents dans R' non galilien

$$m\,\vec{\gamma}(G/R') = \vec{F}_{\substack{resultante \\ réelle}} + \vec{F_e} + \vec{F_c}$$

$\vec{F_e} = -\Sigma m_i\vec{\gamma}_c(m_i^*R'/R)$
$\vec{F_c} = -\Sigma m_i\vec{\gamma}_c(m_i/R)$

$$D(C,\Sigma/R) = \Sigma\,Cm_i\wedge m_i\vec{\gamma}(m_i/R) = \vec{M}(C,\vec{F}_{resultante}) - D_e(C,\Sigma/R) - \vec{D}_c(C,\Sigma/R)$$

Cas particulier important

L'application du théorème du moment cinétique d'un solide en mvt/R par rapport à un axe $(O,\vec{u})$ fixe dans R.

$$\vec{D}(O,S/R) = \frac{d\vec{L}(O,S/R)}{dt}\Big/_R + \underbrace{\vec{V}(O/R) \wedge m\vec{V}(G/R)}_{0}$$ car O est fixe dans R

$$= \vec{M}(O,\vec{F}_{resultante})$$

$\vec{u}$ fixe dans R

$$\vec{D}(O,S/R)\,\vec{u} = \frac{d\vec{L}(O,S/R)}{dt}\Big/_R\,\vec{u} = \vec{M}(O,\vec{F}_{resultante})\,\vec{u}$$

$$\frac{d(\vec{L}.\vec{u})}{dt}\Big/_R = \frac{d\vec{L}}{dt}\Big/_R .\vec{u} + \vec{L}.\frac{d\vec{u}}{dt}\Big/_R$$

$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt}.\vec{u} = \frac{d(\vec{L}.\vec{u})}{dt} - \vec{L}\,\frac{d\vec{u}}{dt}\Big/_R}$$

or $\vec{u}$ fixe dans R $\longrightarrow \frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{0}$.

$$\vec{D}(O,S/R).\vec{u} = \frac{d(\vec{L}(O,S/R).\vec{u})}{dt} = \vec{M}(O,\vec{F}_{resultante}).\vec{u}$$

Si $\vec{u} \perp \vec{M}(C,\vec{F}_{resultante})$ alors $\frac{d(\vec{L}.\vec{u})}{dt} = 0 \longrightarrow \boxed{\vec{L}.\vec{u} = cte}$ eq. mvt

Si $\vec{u} = \vec{z_s}$ direction de l'axe de symétrie de révolution de (S)

alors $$\frac{d\vec{L}}{dt}.\vec{z_s} = \frac{d(\vec{L}.\vec{z_s})}{dt} - \underbrace{\vec{L}\frac{d\vec{z_s}}{dt}}_{0} + (m\vec{V}(C/R) \wedge \vec{V}(G/R))\vec{u} = \vec{M}.\vec{u}$$

car $\vec{z_s}$ direction de l'axe de symétrie de révolution

$$\vec{D}(C,S/R).\vec{z_s} = \frac{d}{dt}(\vec{L}.\vec{z_s}) = \vec{M}(O,\vec{F}_{res}).\vec{z_s}$$

Si on plus $\vec{z_s} \perp \vec{M}(O,\vec{F}_{res})$

alors $\frac{d(\vec{L}.\vec{z_s})}{dt} = 0 \longrightarrow \boxed{\vec{L}.\vec{z_s} = cte}$ eq. mvt

Supposons qu'on a un axe $(C,\vec{u})$ avec C mobile

$$\vec{D}(C,S/R).\vec{u} = \frac{d\vec{L}(C,S/R)}{dt}\Big/_R + \vec{V}(C/R) \wedge m\vec{V}(G/R)).\vec{u} = \vec{M}(C,\vec{F}_{res})\,\vec{u}$$

Scanné avec CamScanner