Chapitre 2 :

La cinématique du solide parfait ou indéformable

I - Les propriétés de la cinématique.

a) notion d'un solide parfait :

définition Un solide est dit indeformable ou parfait ssi la distance mutuelle entre deux pts quelconques de (S) reste inchangée au cours du temps.

De point de vue mathematique le solide (S) est un domaine tq $\forall\ P, Q \in (S)$ $\|\vec{PQ}\| = cte$ $\forall t$ = le temps

$$P(t), Q(t) \longrightarrow \|\overrightarrow{P(t)Q(t)}\| = cte \quad \forall t.$$

b) Notion de réferentiel

Dans ce cours, nous utiliserons les repères d'espace suivants

- Repère fixe $R(O, \vec{x_0}, \vec{y_0}, \vec{z_0})$, d'origine O et de base $(\vec{x_0}, \vec{y_0}, \vec{z_0})$
- Repère lié au solide (S) $R_S(G, \vec{x_S}, \vec{y_S}, \vec{z_S})$ d'origine G et de base $(\vec{x_S}, \vec{y_S}, \vec{z_S})$ (G : centre de masse)
- Reperes intermediaires $R_1(\vec{u}, \vec{v}, \vec{z_0})$

  $R_2(\vec{u}, \vec{w}, \vec{z_S})$

Comme on va traiter dans ce cours la mécanique classique donc on va confondre entre la notion de réferentiel et repère d'espace car tous les repères d'espace st munis d'une m̂ horloge ou espace temps.

c) notion de la cinématique du solide parfait

i) **définition** : C'est l'étude de la distribution de la vitesse des pts du solide (S) independament des causes qui genèrent le mvt de ce dernier.

ii) Champ de la distribution des vitesses d'un solide et torseur cinématique ou torseur vitesse

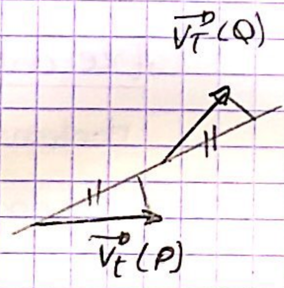
<u>définition</u>

Le champ vectoriel de la distribution des vitesses noté $\vec{V_t}$: famille de champ dependant d'un paramètre t = temp

$$V_t : \mathcal{E} \longrightarrow E$$

$$P = P(t) \longrightarrow \vec{V}(P \in S/R_0) = \frac{d\vec{OP}}{dt}\Big/_{R_0} \quad , R_0\,(O, \vec{x_0}, \vec{y_0}, \vec{z_0})$$

O origine de R_0



Montrons que $\vec{V_t}$ est un champ antisymetrique.

Pour cela, montrons d'abord que $\vec{V_t}$ est equiprojectif.

$$\forall P, Q \in (S) \Rightarrow \vec{PQ}\left[\vec{V_t}(Q \in S/R) - \vec{V}(P \in S/R)\right] = 0$$

En effet

$\forall$ P, Q (S) on a $\|\overrightarrow{P(t)Q(t)}\|^2 = cte^2$

$$\|\vec{PQ}\|^2 = \overrightarrow{P(t)Q(t)} \cdot \overrightarrow{P(t)Q(t)}$$

$$\frac{d\|PQ\|}{dt}\Big/_{R_0} = 2\,\overrightarrow{P(t)Q(t)} \cdot \frac{d(\overrightarrow{P(t)Q(t)})}{dt}\Big/_{R_0} = 0$$

$$= 2\,\overrightarrow{P(t)Q(t)} \cdot \left[\frac{d(\overrightarrow{OQ(t)})}{dt}\Big/_{R_0} - \frac{d(\overrightarrow{OP(t)})}{dt}\Big/_{R_0}\right] = 0$$

$$2\,\overrightarrow{P(t)Q(t)}\left[\vec{V}(Q \in S/R_0) - \vec{V}(P \in S/R_0)\right] = 0 \quad \text{CQFD}$$

d'après le théorème : tout champ equiprojectif est antisymétrique donc $\vec{V_t}$ est un champ antisymetrique. Il sera alors le moment d'un torseur qu'on appelle le torseur cinématique ou torseur vitesse noté $\mathcal{T}_V$ ou $\mathcal{T}_{cinématique}$

$\exists$ alors un vecteur qu'on appelle le vecteur du torseur noté $\vec{\Omega}_{S/R_0}$ qu'on appelle le vecteur rotation instantanée du solide dans son mvt $/R_0$

$\mathcal{T}_V = [\vec{\Omega}_{S/R_0}, \vec{V}_t(S/R_0)]$

Si le torseur est connu en un pt $A \in (S)$, alors il sera connu pour n'importe quel pt $P \in (S)$

en effet :

$\mathcal{T}_V(A) = [\vec{\Omega}_{S/R_0}, \vec{V}(A \in S/R_0)]$

$\mathcal{T}_V(P) = [\vec{\Omega}_{S/R_0}, \vec{V}(P \in S/R_0)]$

$\vec{V}(P \in S/R_0) = \vec{V}(A \in S/R_0) + \vec{\Omega}_{S/R_0} \wedge \vec{AP}$ la ppté d'antisymetrie de $\vec{V}_t$

Axe central du torseur $\mathcal{T}_V$

Montrons que cet axe (Δ) est l'ensemble des pts de (S) qui ont la même vitesse et dont la direction de $(\Delta) \parallel \vec{\Omega}_{S/R_0}$

Soient $P, P' \in (\Delta)$ et $P, P' \in (S)$

$P, P' \in (S) \Leftrightarrow \vec{V}(P' \in S/R_0) = \vec{V}(P \in S/R_0) + \vec{\Omega}_{S/R_0} \wedge \vec{PP'}$

$P \in (\Delta) \Leftrightarrow \exists \alpha$ tq $\vec{V}(P \in S/R_0) = \alpha \vec{\Omega}_{S/R_0}$

$P' \in (\Delta) \Leftrightarrow \exists \alpha'$ tq $\vec{V}(P' \in S/R_0) = \alpha' \vec{\Omega}_{S/R_0}$

Supposons que $\alpha \neq \alpha'$

$\vec{V}(P' \in S/R_0) - \vec{V}(P \in S/R_0) = \vec{\Omega}_{S/R_0} \wedge \vec{PP'}$

$= (\alpha' - \alpha) \vec{\Omega}_{S/R_0}$

contradiction ~~donc~~ car $(\alpha - \alpha')\vec{\Omega}_{S/R_0}$ ne peut pas être $\perp$ à $\vec{\Omega}_{S/R_0}$

donc $\alpha = \alpha'$

$\vec{V}(P \in S/R) = \vec{V}(P' \in S/R_0)$ et $\vec{\Omega}_{S/R} \wedge \vec{PP'} = \vec{0}$ $\vec{PP'} \parallel \vec{\Omega}_{S/R_0}$

donc la direct° $(\Delta) \parallel \vec{\Omega}_{S/R_0}$

Scanné avec CamScanner

Expression de $\vec{\Omega}_{S/R}$: vitesse de rotation instantanée

ppté d'un solide

Soit $P, Q \in (S)$

$$\vec{V}(P \in S/R_0) - \vec{V}(Q \in S/R_0) = \vec{\Omega}_{S/R} \wedge \vec{QP}$$

$$\frac{d\vec{OP}}{dt}\Big|_{R_0} - \frac{d\vec{OQ}}{dt}\Big|_{R_0} = \frac{d\vec{PQ}}{dt}\Big|_{R_0}$$

$$= \frac{d(\vec{OP} - \vec{OQ})}{dt}\Big|_{R_0}$$

$$\frac{d\vec{QP}}{dt}\Big|_{R_0} = \vec{\Omega}_{S/R_0} \wedge \vec{QP}$$

si $\vec{u}$ est un vecteur lié au solide

$$\boxed{\frac{d\vec{U}}{dt} = \vec{\Omega}_{S/R_0} \wedge \vec{u}}$$

en particulier $\vec{x_S}$, $\vec{y_S}$ et $\vec{z_S}$ sont liés au solide (S)

$$\frac{d\vec{x_S}}{dt}\Big|_{R_0} = \vec{\Omega}_{S/R_0} \wedge \vec{x_S}$$

$$\frac{d\vec{y_S}}{dt}\Big|_{R_0} = \vec{\Omega}_{S/R_0} \wedge \vec{y_S}$$

$$\frac{d\vec{z_S}}{dt}\Big|_{R_0} = \vec{\Omega}_{S/R_0} \wedge \vec{z_S}$$

La première manière d'exprimer $\vec{\Omega}_{S/R}$

$$\vec{x_S} \wedge \frac{d\vec{x_S}}{dt}\Big|_{R_0} = \vec{x_S} \wedge (\vec{\Omega}_{S/R_0} \wedge \vec{x_S})$$

$$\vec{y_S} \wedge \frac{d\vec{y_S}}{dt}\Big|_{R_0}$$

$$= (\vec{x_S} \cdot \vec{x_S})\, \vec{\Omega}_{S/R_0} - (\vec{x_S} \cdot \vec{\Omega}_{S/R_0})\, \vec{x_S}$$

$$\vec{z_S} \wedge \frac{d\vec{z_S}}{dt}\Big|_{R_0}$$

$$\boxed{\vec{\Omega}_{S/R_0} = \frac{1}{2}\left[\vec{x_S} \wedge \frac{d\vec{x_S}}{dt}\Big|_{R_0} + \vec{y} \wedge \frac{d\vec{y_S}}{dt}\Big|_{R_0} + \vec{z_S} \wedge \frac{d\vec{z_S}}{dt}\Big|_{R_0}\right.}$$

cette relat° necessite la connaissance de la variation de $\vec{x_S}$, $\vec{y_S}$ et $\vec{z_S}$ en fct du temps

2ème manière de connaître $\vec{\Omega}_{S/R_0}$

Si on connait 3 points A, B, C de (S) avec leurs vitesses

$$* \quad \vec{V}(B\in S/R) - \vec{V}(A\in S/R) = \vec{\Omega}_{S/R_0} \wedge \vec{AB}$$

$$** \quad \vec{V}(C\in S/R) - \vec{V}(A\in S/R) = \vec{\Omega}_{S/R_0} \wedge \vec{AC}$$

d'après

$$\vec{\Omega}_{S/R_0} = \frac{\vec{AB} \wedge [\vec{V}(B\in S/R_0) - \vec{V}(A\in S)]}{\|\vec{AB}\|^2} + \lambda\vec{AB}$$

pour eleminetr λ on utiliser l'eq (**)

Rq Le champ d'accéleration n'est pas antisymétrique

En effet

$$\vec{V}(P\in S/R_0) = \vec{V}(Q\in S/R_0) + \vec{\Omega}_{S/R_0} \wedge \vec{QP}$$

$$\vec{\gamma}(P\in S/R_0) = \frac{d\vec{V}(P\in S/R_0)}{dt}\Big/_{R_0} = \frac{d(\vec{V}(Q\in S/R_0))}{dt} + \frac{d\vec{\Omega}_{S/R_0}}{dt} \wedge \vec{QP}$$
$$+ \vec{\Omega}_{S/R_0} \wedge \frac{d\vec{QP}}{dt}$$

$$= \vec{\gamma}(Q\in S/R_0) + \frac{d\vec{\Omega}_{S/R_0}}{dt} \wedge \vec{QP} + \vec{\Omega}_{S/R_0} \wedge (\vec{\Omega}_{S/R_0} \wedge \vec{QP})$$

Le champ d'accéleration ne peut pas être le moment lorsqu'il n'est pas aymétrique

II- moment d'un solide parfait

a) définition

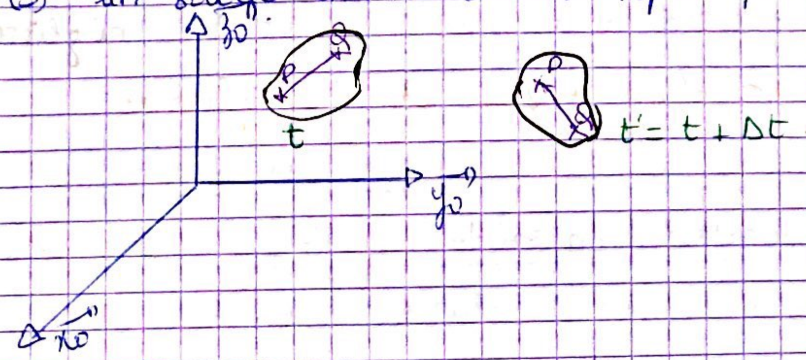
Un solide (S) dans l'espace affine peut avoir 3 type de mvt

- mvt de rotation
- mvt de translation
- Composé d'un mvt de translation et d'un mvt de rotation

Scanné avec CamScanner

b_ La nature de τ_V correspondant aux différents types de mvt du solide dans $\mathcal{E}$

Soit (S) un solide en mvt dans $\mathcal{E}$ repère par rapport $R_0(O, \vec{x_0}, \vec{y_0}, \vec{z_0})$



Soit P, Q deux pts quelconque de (S)

On definit le vecteur $\vec{u}$

$\vec{u} = \frac{\vec{PQ}}{\|\vec{PQ}\|}$ porté par $\vec{PQ}$

au cours du temps il va décrire une trajectoire tracer par les pts P, Q.

$\vec{PQ} = \|\vec{PQ}\| \, \vec{u}(t)$

$$\left.\frac{d\vec{PQ}}{dt}\right|_{R_0} = \|\vec{PQ}\| \left.\frac{d\vec{u}(t)}{dt}\right|_{R_0} = \begin{cases} \vec{V}(Q\in S/R_0) - \vec{V}(P\in S/R_0) \\ \vec{\Omega}_{S/R_0} \wedge \vec{PQ} \end{cases}$$

* si $\vec{u}(t) = cte \longrightarrow \vec{V}(P\in S/R_0) = \vec{V}(Q\in S/R_0)$ et $\vec{\Omega}_{S/R_0} = \vec{0}$

le mvt du solide sera un **mvt de translat°**

Le torseur vitesse associé à ce type de mvt $\tau_V = [\vec{\Omega}_{S/R_0} = \vec{0}, \vec{V}(S/R_0) = cte]$

est un couple

* si $\vec{u}(t) \neq cte$ et $\exists$ un pt $P\in(S)$ tq $\vec{V}(P\in S/R_0) = \vec{0}$ et $\vec{\Omega}_{S/R_0} \neq \vec{0}$

$$\left.\frac{d\vec{AQ}}{dt}\right|_{R_0} = \vec{\Omega}_{S/R_0} \wedge \vec{AQ}$$

Le solide a un mvt **rotat°** autour du pt A et vitesse de rotation $\vec{\Omega}_{S/R_0}$

Le torseur vitesse associé à ce type de mvt $\tau_V = [\vec{\Omega}_{S/R_0}, \vec{0}] = G(A)$

est un glisseur

Scanné avec CamScanner

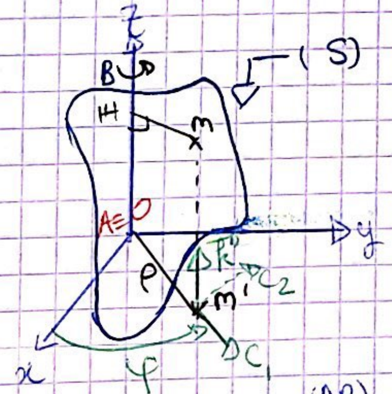
* Si $u(t) \neq cte$ et il n'existe aucun pt de (S) tq sa vitesse soit nulle alors le mvt de S est la composé d'un mvt de translat° et d'un mvt de rotation

Le torseur associé à ce type de mvt n'est ni glisseur ni couple c'est la somme d'un couple et d'un glisseur.

c _ Applications sur les types de mvt particuliers

i) mvt de rotat° d'un solide autour d'un axe fixe.

Un solide a un mvt de rotation autour d'un axe fixe ssi $\exists$ 2 pts de (S) qui soient fixes. l'axe de rotation sera la dte joignant les deux pts derniers



(S) repéré / R_0, soit $A, B \in (S)$ fixe dans R_0.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{V}(A \in S/R_0) = \vec{0} \\ \vec{V}(B \in S/R_0) = \vec{0}\end{array}\right\} \rightarrow \vec{V}(P \in S/R_0) = \vec{0}$$

$(AB) = (Oz)$.

$m \in (S)$ et $\notin (Oz)$

$\varphi(\vec{Ox}, \vec{Om'})$

$$\vec{V}(m \in S/R_0) = \vec{V}(O \in S/R_0) + \vec{\Omega}_{S/R_0} \wedge \vec{Om}$$

$$= \underbrace{\vec{V}(H \in S/R_0)}_{0} + \vec{\Omega}_{S/R_0} \wedge \vec{Hm}$$

$$= \vec{\Omega}_{S/R_0} \wedge \vec{Hm}$$

$$= \dot{\varphi}\vec{k} \wedge \rho\vec{c_1}$$

$$\vec{V}(m \in S/R_0) = \rho\dot{\varphi}\,\vec{c_2}.$$

$\mathcal{T}_V(O) = [\dot{\varphi}\vec{k}, \vec{0}]$ est un glisseur

Le mvt de (S) est un mvt de rotation

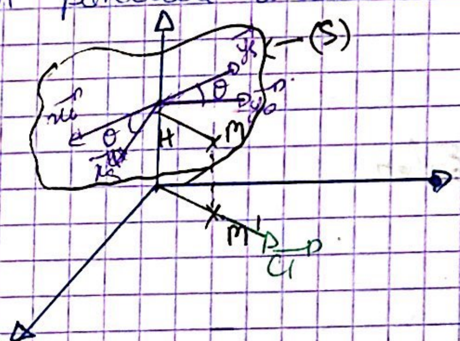
Tous les pts de (S) $\notin$ à (AB) = l'axe de rotation tournent autour de cet axe avec la vitesse $\vec{V}(m \in S/R_0) = \rho\dot{\varphi}\vec{c_2}$

$$\vec{\gamma}(M \in S_{/R_0}) = \dot{\rho}\dot{\varphi}\vec{C_2} + \rho\ddot{\varphi}\vec{C_2} - \rho\dot{\varphi}^2\vec{C_1} = -\rho\dot{\varphi}^2\vec{C_1} + (\dot{\rho}\dot{\varphi} + \ddot{\varphi}\rho)\vec{C_2}$$

ii) mvt hélicoïdal simple d'un solide

Un solide a mouvement hélicoïdal simple si son mvt est la composée d'un mvt de translation rectiligne et d'un mvt de rotation autour de l'axe de direction parallèle à celle de la translation

$$\vec{\Omega}_{S/R_0} = \dot{\theta}\vec{k}$$



$R_0\,(O, \vec{x_0}, \vec{y_0}, \vec{z_0})$
$R_S\,(A, \vec{x_S}, \vec{y_S}, \vec{z_S})$
(Oz) l'axe de rotation

$A \in (S)$ et $(A \in$ l'axe de rotation

$$OA = h(t)\,\vec{k}$$

$$\vec{V}(A \in S_{/R_0}) = \dot{h}(t)\,\vec{k}$$

$M \in (S)$ et $M \notin$ l'axe (Oz)

$$\vec{V}(M \in S_{/R_0}) = \vec{V}(A \in S_{/R_0}) + \vec{\Omega}_{S/R_0} \wedge \vec{AM}$$

$$= \dot{h}(t)\,\vec{k} + \dot{\theta}\vec{k} \wedge \vec{AM}$$

$$= \dot{h}(t)\,\vec{k} + \dot{\theta}\vec{k}\,(\vec{AH} + \vec{HM})$$

H projection orthogonal de M sur (Oz).

L'invariant scalaire $\mathcal{I}(A)$?

$$\mathcal{I}(A) = \vec{\Omega}_{S/R_0} \cdot \vec{V}(A \in S_{/R_0}) = \dot{\theta}\vec{k} \cdot \dot{h}(t)\,\vec{k}$$

$$= \dot{h}(t)\,\dot{\theta}(t) \neq 0.$$

donc le torseur associé à ce type de mvt n'est ni couple ni glisseur

L'invariant vectoriel $\vec{I}(A)$.

$$\vec{I}(A) = \frac{\mathcal{I}(A)}{\|\vec{\Omega}_{S/R_0}\|^2}\,\vec{\Omega}_{S/R_0} = \frac{\dot{h}(t)\,\dot{\theta}(t)\,\dot{\theta}(t)\,\vec{k}}{\dot{\theta}(t)^2} = \dot{h}(t)\,\vec{k}$$

$$= \vec{V}(A \in S_{/R_0})$$

s'appelle la vitesse de glissement.

iii) Mvt de rotation d'un solide (S) par rapport à un pt fixe dans R_0.

Un solide (S) a un mvt de rotation par rapport à un pt fixe dans R_0 s'il existe un pt unique de (S) qui soit fixe dans R_0

La rotation du solide par rapport à un pt fixe engendre 3 rotations autour de 3 axes d'angle respectif ψ, θ, φ qu'on appelle angles d'Euler.

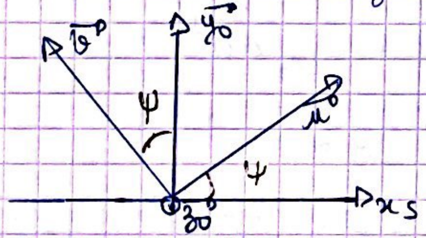
ψ angle de precession

angle de nutation

angle de rotation propre.

α) angle de precession

$$R_0(\vec{x_0}, \vec{y_0}, \vec{z_0}) \xrightarrow[\text{d'angle } \psi]{\text{Rot}(\psi \text{ autour de } \vec{z_0})} R_1(\vec{u}, \vec{v}, \vec{z_0})$$



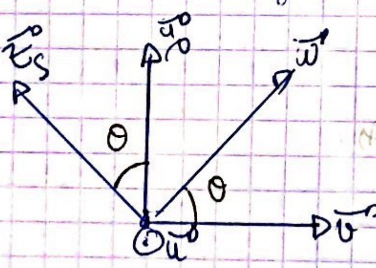
$\vec{u} = \cos\psi\,\vec{x_0} + \sin\psi\,\vec{y_0}$

$\vec{v} = -\sin\psi\,\vec{x_0} + \cos\psi\,\vec{y_0}$

$$\boxed{\vec{\Omega}_{R_1/R_0} = \dot{\psi}\,\vec{z_0}}$$

β) angle de rotation θ

$$R_1(\vec{u}, \vec{v}, \vec{z_0}) \xrightarrow[\text{d'angle } \theta]{\text{rot}(\theta) \text{ autour de } \vec{u}} R_2(\vec{u}, \vec{w}, \vec{z_S})$$



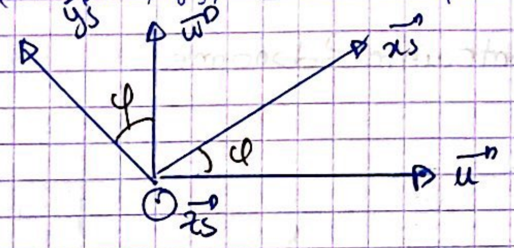
$\vec{w} = \cos\theta\,\vec{v} + \sin\theta\,\vec{z_0}$

$\vec{z_S} = -\sin\theta\,\vec{v} + \cos\theta\,\vec{z_0}$

$$\boxed{\vec{\Omega}_{R_2/R_1} = \dot{\theta}\,\vec{u}}$$

γ) Angle de rotation φ

$R_2(\vec{u}, \vec{w}, \vec{z_S}) \xrightarrow{\text{rot}(\varphi \text{ autour de } \vec{z_S})} R_S(\vec{x_S}, \vec{y_S}, \vec{z_S})$



$$\vec{\Omega}_{R_S/R_2} = \dot{\varphi}\,\vec{z_S}$$

$\vec{\Omega}_{S/R_0}$?

$$\vec{\Omega}_{S/R_0} = \vec{\Omega}_{R_S/R_0} = \vec{\Omega}_{R_S/R_2} + \vec{\Omega}_{R_2/R_1} + \vec{\Omega}_{R_1/R_0}$$

$$\vec{\Omega}_{S/R_0} = \dot{\varphi}\,\vec{z_S} + \dot{\theta}\,\vec{u} + \dot{\psi}\,\vec{z_0}$$

En général un solide (S) en mvt libre dans $\mathcal{E}$ nécessite la connaissance de 6 variables indépendantes ou 6 degrés de libertés

3 degrés de translations qui sont les coordonnées de G centre de masse x_G, y_G, z_G

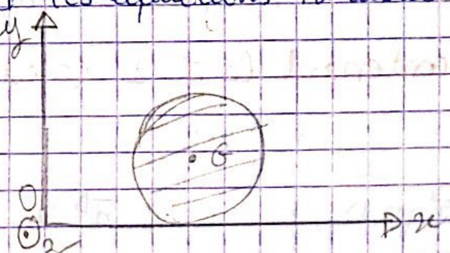
3 degrés de rotation qui sont les 3 angles d'Euler ψ, θ et φ

Il faut chercher 6 équations indépendantes liants les 6 variables pour aboutir à une solution unique c.à.d les équations horaires.

$x_G(t)$ $\quad \psi(t)$

$y_G(t)$ $\quad \theta(t)$

$z_G(t)$ $\quad \varphi(t)$



Cela nous permettra de savoir la position et l'orientation du solide (S) à chaque instant.

Quand le solide possède des contraintes qui sont des actions de contact entre solides

Chaque contraintes se traduit par un ou plusieurs équations liant leurs dérivées et le temps

Si on a une contrainte qui donne une ou plusieurs equations qui dependent(ent) uniquement des coordonnées et du temps.

On l'appelle liaison ou contrainte holonome

exemple

- Une boule roulant sur le sol possède 5 degrés de liberté :

  2 → translations x_G, y_G ($z_G = R$)

  3 → rotations ψ, θ, φ,

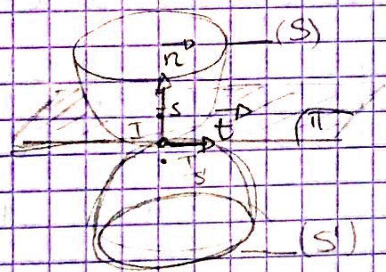
- Un cylindre roulant sur le plan horizontal a 4 degrés

  → 2 translations x_G, y_G

  → 2 rotations ψ, φ

III Cinématique des solides en contact :

Soient (S) et (S') deux solides en mvt par rapport à un repère



π_S plan tangent au solide (S) au pt I_S

$\pi_{S'}$ plan tangent au solide (S') au pt $I_{S'}$

π plan tangent à (S) et (S') au pt de contact I.

On dit que (S') et (S) sont **contact** si ∃ un plan tangent à (S) et (S') contenant le pt I. (c'est π)

On definit deux vecteurs unitaires $\vec{n}$ et $\vec{t}$

$\vec{n} \perp$ plan (π)

$\vec{t} \in$ plan (π)

Vitesse de glissement d'un solide (S)/(S') au pt de contact I

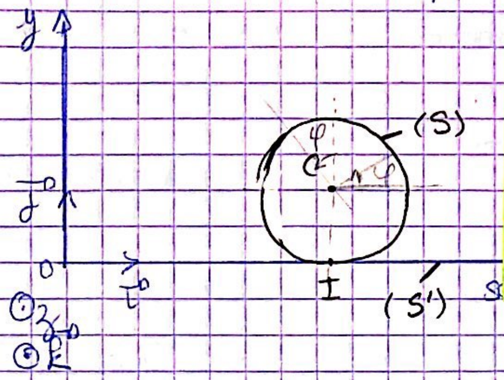
$\vec{V_g}(I, (S)/(S'))$ = vitesse de glissement.

* $\vec{V_g}(I, (S)/(S')) = -\vec{V_g}(I, (S')/(S))$
* $\vec{V_g}(I, (S)/(S')) = \vec{V}(I \in (S)/R') - \vec{V}(I \in (S')/R')$ où R' repère qq de $\mathcal{E}$
* $\vec{V_g} \in$ plan (π) c à d $\parallel \vec{t}$

Application

Un cerceau de centre O, de ra[...] Ox et reste constamment dans le pla[n] [...]

La vitesse de glissement tjr dans le plan π qui est le plan de contact avec le solide



$\vec{n} = \vec{j}$

$t \in$ plan (xoz)

$y_C = R$

$z_C = 0$

$\theta = cte$

$\psi = cte$

$$\vec{V}(I,(S)/(S')) = \vec{V}(I \in (S)/R) - \vec{V}(I \in (S')/(R))$$

$\vec{V}(I \in (xoz)/R) = \vec{0}$ car $I \in (xoz)$ qui est fixe dans R

$$\vec{V}(I \in (S)/R) = \vec{V}(C \in (S)/R) + \vec{\Omega}_{S/R} \wedge \vec{CI}$$

$$= \left.\frac{d\vec{OC}}{dt}\right|_R + \dot{\varphi}\vec{k} \wedge (-a\vec{j})$$

$$= \dot{x}_G \vec{i} + a\dot{\varphi}\vec{i}$$

$$= (\dot{x}_G + a\dot{\varphi})\vec{i}$$

$$\vec{OC} = \begin{vmatrix} x_G \\ y_C = R \\ z_C = 0 \end{vmatrix}$$

x_C, φ 2 degrés de liberté

La condition de roulement sans glissement de (S) sur (S') se traduit par $\vec{V}_g(I,(S)/(S')) = \vec{0}$

$$\dot{x}_C + a\dot{\varphi} = 0 \longrightarrow \boxed{x_C + a\varphi = cte}$$

Le nombre de degrés de liberté devient 1 si on tient comptes de cette contraintes

Définition d'un solide animé dans un mvt plan dans l'espace affine

Il y a deux définitions équivalentes :

1ère définition

Un solide (S) est en mvt plan dans l'espace affine (par rapport à un repère R) s'il existe un plan tangent Π_S à (S) qui reste constamment en coïncidence avec le plan tangent Π à (S') lié à R

Dans l'exemple précédent :

Π_S = plan $(\vec{x_S}\, C\, \vec{y_S})$, $\Pi(\vec{x}\, O\, \vec{y})$

$\Pi(xoy)$ fixe dans R

Π_S est constamment en coïncidence avec Π

$\Rightarrow$ (S) a un mvt plans.

$2^{ème}$ définitions

Un solide de (S) a un mvt ssi $\exists$ un vecteur unitaire $\vec{u}$ tq le mvt de (S) est constamment tangent au mvt de rotation autour de l'axe de direct° $\vec{u}$ ou constamment tangent à un mvt de translation de $\perp$ $\vec{u}$.

Centre instantanée de rotation CIR

Soient (S) et (S') deux solides

(S) est en mvt / R et (S') lié à R

Π_S = plan tangent à (S) $\qquad$ Π = plan tangent à (S') lié à R

$$\vec{\Omega}_{S/\Pi} \neq \vec{0}$$

Les mvts inversés de rotation Π/Π_S et Π_S/Π ont chacun un vecteur de rotation instantanée qui passe respt par I_S pour Π_S et $I_{S'}$ pour Π

Les pts I_S vont décrire une trajectoire qu'on appelle la roulante de Π/Π_S.

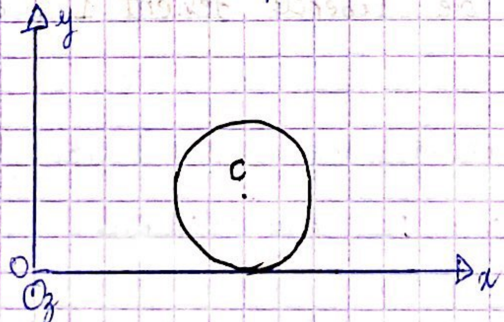
Les pts $I_{S'}$ vont décrire une trajectoire qu'on appelle la base de Π_S/Π

Au pt de contact I entre (S) et (S') ou Π_S et Π

$\vec{V}g(I,(S)/(S'))$ est la vitesse de glissement.

si $\vec{V}g(I,(S)/(S')) = \vec{0}$, I s'appelle CIR de la roulante / à la base

Exemple



$I_S \in \Pi_S \longrightarrow$ trajectoire circulaire (roulante.

$I \in \Pi \longrightarrow$ trajectoire rectiligne (base)