Chapitre 1 : Généralités sur les torseurs

I - Introduction

Les torseurs sont des objets mathématiques utilisés pour une présentation condensée de certains résultats de la mécanique du solide

II - Rappels mathématiques

On désigne par E et $\mathcal{E}$ respectivement l'espace vectoriel et l'espace affine

Soient $\vec{u}, \vec{v} \in E$ et $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$ une base orthonormée de E.

- $\sum u_i \vec{e_i} = \vec{u} = \begin{vmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{vmatrix}_{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}}$ $\quad$ • $\sum v_i \vec{e_i} = \vec{v} = \begin{vmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{vmatrix}_{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}}$

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \sum_{i=1}^{3} \vec{u_i} \vec{e_i} \cdot \sum_{j=1}^{3} \vec{v_i} \vec{e_j} = \sum_{i,j} u_i v_i \; \vec{e_i} e_j$

$\vec{e_i} \vec{e_j} = \delta_{ij}$ = symbole de Kronecker = $\begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = \sum_1^3 u_i v_i$

- $\vec{u} \wedge \vec{v} = \sum u_i v_j (\vec{e_i} \wedge \vec{e_j}) = \sum u_i v_j \, \varepsilon_{ijk} \vec{e_k}$

$\vec{e_i} \wedge \vec{e_j} = \sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} \vec{e_k}$ où ε_{ijk} = teneur à 3 indices
: il a la forme d'une matrice.

III - Division vectorielle

étant donné deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b} \in E$

Existe-t-il un vecteur $\vec{x} \in E$ tq $\vec{a} \wedge \vec{x} = \vec{b}$ (*), avec $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$?

S'il existe $\vec{x}$ s'appelle le résultat de la division de $\vec{b}$ par $\vec{a}$

* Si $\vec{a} = \vec{0}$, $\vec{b} = \vec{0}$ $\rightarrow$ l'eq admet une infinité de solution $\vec{x}$ $S = \mathbb{R}^3$
* Si $\vec{a} = \vec{0}$ et $\vec{b} \neq \vec{0}$ $\rightarrow$ l'eq n'admet pas de solution $S = \emptyset$
* Si $\vec{a} \neq \vec{0}$ et $\vec{b} = 0$ $\rightarrow$ $\vec{a} \parallel \vec{x}$
  $\rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}$ $\vec{x} = \lambda \vec{a}$: C'est l'eq engendré par le vecteur $\vec{a}$

* si $\vec{a} \neq \vec{0}$ et $\vec{b} \neq \vec{0}$ cas ① $\rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{0} \rightarrow$ l'eq ⊛ admet une solution dependant d'un paramètre

cas ② $\vec{a}\cdot\vec{b} \neq \vec{0} \rightarrow$ pas de solution.

car si $\vec{a}\cdot\vec{b} \neq 0 \rightarrow$ l'eq ⊛ est fausse

car $\vec{a}\cdot(\vec{a} \wedge \vec{x}) = x\,(\vec{a} \wedge \vec{a}) = 0 \rightarrow$ pas de $ de ⊛

Soit x_0 une solution partulière de l'eq ⊛

$\vec{a} \wedge \vec{x_0} = \vec{a} \wedge \vec{x} = \vec{b}$

$\vec{a} \wedge (\vec{x} - \vec{x_0}) = \vec{0} \rightarrow \vec{x} - \vec{x_0} \parallel \vec{a}$

$\rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}$ tq $\vec{x} - \vec{x_0} = \lambda \vec{a}$

$$\boxed{\vec{x} = \vec{x_0} + \lambda \vec{a}}$$

$\vec{a} \wedge \vec{x} = \vec{b}$ la solution générale de l'equation sera la somme de la solution générale de l'eq ⊛ sans second membre ($\vec{a} \wedge \vec{x} = \vec{0}$) et l'equation particulière de l'equation ⊛ sans second membres

$$\boxed{\vec{x} = \vec{x_0} + \vec{x_1} = \vec{x_0} + \lambda \vec{a}}$$

α? $\vec{a} \wedge \vec{x_0} = \vec{b}$, on choisit $\vec{x_0} = \alpha\, \vec{a} \wedge \vec{b} \perp$ plan (a, b)

$\vec{a} \wedge \vec{x_0} = \vec{b} = \vec{a} \wedge (\vec{a} \wedge \vec{b}) = \vec{b}$

$= \alpha \left[\underbrace{(\vec{a}\cdot\vec{b})}_{\vec{0}} \vec{a} - (\vec{a}\cdot\vec{a})\vec{b} \right]$

$\Leftrightarrow -\alpha \,\|\vec{a}\|^2\, \vec{b} = \vec{b}$

$\Leftrightarrow -\alpha \,\|\vec{a}\|^2 = 1$

$\Leftrightarrow \alpha = \dfrac{-1}{\|\vec{a}\|^2}$

$$\boxed{\vec{x_0} = -\frac{\vec{a} \wedge \vec{b}}{\|\vec{a}\|}} \qquad \boxed{\vec{X}(\lambda) = -\frac{\vec{a} \wedge \vec{b}}{\|\vec{a}\|^2} + \lambda \vec{a}}$$

IV Application linéaire antisymétrique

Elle joue un rôle très important en mécanique du solide :

A) Application linéaire

$E \longrightarrow E$

$\vec{u} \longmapsto \mathcal{L}(\vec{u}) = \vec{u}'$ s'exprime dans une base de E

si on désigne par $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$ base de E

On associe à $\mathcal{L} \longrightarrow$ une matrice L tq $\mathcal{L}(\vec{u}) = L\vec{u}$

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \vec{e_1} \\ \vec{e_2} \\ \vec{e_3} \end{array} \end{array}$$

$$\mathcal{L}(\vec{e_1}) = L_{11}\vec{e_1} + L_{21}\vec{e_2} + L_{31}\vec{e_3}$$

$$= \sum_{j=1}^{3} L_{j1}\vec{e_j}$$

$$\mathcal{L}(\vec{e_i}) = \sum L_{ji}\vec{e_j}$$

$$L_{ij} = \vec{e_i}\cdot\mathcal{L}(e_j)$$

$$\vec{e_j}\cdot\mathcal{L}(\vec{e_i}) = L_{ji}$$

B) Application linéaire antisymétrique

$\mathcal{L}$ est antisymétrique ssi $\forall \vec{u}, \vec{v} \in E$ on a

$$\boxed{\vec{u}\cdot\mathcal{L}(\vec{v}) = -\vec{v}\cdot\mathcal{L}(\vec{u})}$$

Elle est linéaire càd $\forall \vec{u}, \vec{v} \in E$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\boxed{\mathcal{L}(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) = \alpha\mathcal{L}(\vec{u}) + \beta\mathcal{L}(\vec{v})}$$

La matrice L associé à l'application linéaire antisymétrique $\mathcal{L}$ est antisymétrique

en effet $\quad e_1\cdot\mathcal{L}(\vec{e_1}) = -\vec{e_1}\cdot\mathcal{L}(e_1)$

$L_{11} = -L_{11} \longrightarrow L_{11} = 0$

de m̂ $L_{22} = L_{33} = 0$

$$L = \begin{pmatrix} 0 & L_{12} & L_{13} \\ -L_{12} & 0 & L_{23} \\ -L_{13} & -L_{23} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{e_i}\cdot\mathcal{L}(\vec{e_j}) = L_{ij} = -\vec{e_j}\cdot\mathcal{L}(\vec{e_i}) = -L_{ji}$$

Il existe un vecteur S associé à l'application linéaire antisymétrique $\mathcal{L}$ donné par $\mathcal{L}(\vec{u}) = \mathcal{L}(\vec{u}) = \vec{S}\wedge\vec{u} = L\vec{u}$

$$\vec{S} = \left|\begin{array}{l} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{array}\right._{\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3}}$$

i - Expressions de S_1, S_2, S_3 en fonction des coefficients de la matrice L

$$\mathcal{L}(\vec{e_1}) = \vec{S} \wedge \vec{e_1} = \begin{vmatrix} 0 \\ -L_{12} \\ -L_{13} \end{vmatrix}_{\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3}} = \begin{vmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{vmatrix}_{\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3}} \wedge \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}_{\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3}}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 \\ S_3 \\ -S_2 \end{vmatrix}_{\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3}}$$

$$\rightarrow \begin{cases} S_3 = -L_{12} \\ S_2 = -L_{13} \end{cases}$$

$$\mathcal{L}(\vec{e_2}) = \vec{S} \wedge \vec{e_2} = \begin{vmatrix} L_{12} \\ 0 \\ -L_{23} \end{vmatrix}_{\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3}} = \begin{vmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{vmatrix}_{\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3}} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}_{\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3}} = \begin{vmatrix} -S_3 \\ 0 \\ S_1 \end{vmatrix}_{e}$$

$$\rightarrow \begin{cases} S_3 = -L_{12} \\ S_1 = -L_{23} = L_{32} \end{cases}$$

expression de $\vec{S}$ en fct de $\mathcal{L}$?

$$\boxed{S = \frac{1}{2} \sum_1^3 [\vec{e_i} \wedge \mathcal{L}(\vec{e_i})]}$$

Preuve

$$\mathcal{L}(\vec{e_i}) = \vec{S} \wedge \vec{e_i}$$

$$\vec{e_i} \wedge \mathcal{L}(\vec{e_i}) = \vec{e_i} \wedge (\vec{S} \wedge \vec{e_i})$$

$$= (\vec{e_i} \cdot \vec{e_i})\vec{S} - (\vec{e_i} \cdot \vec{S})\vec{e_i}$$

$$\vec{e_i} \cdot \vec{S} = \vec{e_i} \sum_{j=1}^3 S_j \vec{e_j}$$

$$= \sum_{j=1}^3 \vec{e_i}\vec{e_j} S_j$$

$$= S_i$$

$$\vec{e_i} \wedge \mathcal{L}(\vec{e_i}) = (\vec{e_i} \cdot \vec{e_i})\vec{S} - S_i \vec{e_i}$$

$$\sum \vec{e_i} \wedge \mathcal{L}(\vec{e_i}) = \sum (\vec{e_i} \cdot \vec{e_i})\vec{S} - \sum S_i \vec{e_i}$$

$$= 3\vec{S} - \vec{S} = 2\vec{S}$$

$$\vec{S} = \frac{1}{2} \sum (\vec{e_i} \wedge \mathcal{L}(\vec{e_i})) \text{ CQFD}$$

V - Champ vectoriel antisymétrique

A) Définition d'un champ vectoriel $\vec{\mathcal{H}}$

C'est une application de $\mathcal{E} \longrightarrow E$

$P \longmapsto \vec{\mathcal{H}}(P)$ = vecteur

B) Application champ vectoriel antisymétrique

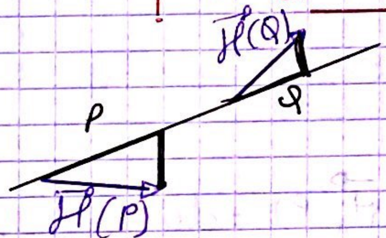
$\mathcal{H}$ est antisymétrique ssi $\exists$ un pt $A \in \mathcal{E}$ et une application linéaire antisymétrique $\mathcal{L}$ tq :

$$\boxed{\forall P \in \mathcal{E} : \vec{\mathcal{H}}(P) - \vec{\mathcal{H}}(A) = \mathcal{L}(\vec{AP}) = \vec{S} \wedge \vec{AP}}$$

*** Champ équiprojectif**

Un champ $\mathcal{H}$ est équiprojectif ssi :

$\forall P, Q \subset \mathcal{E}$ $\quad \boxed{PQ \cdot [\vec{\mathcal{H}}(P) - \vec{\mathcal{H}}(Q)] = 0}$



Proposition

Tout champ équiprojectif est antisymétrique et réciproquement

VI Définition d'un torseur

Un torseur est défini par 2 vecteurs qu'on appelle les éléments de réduction ou les coordonnées de celui-ci

Le premier vecteur de torseur est $\vec{S} = \vec{R}$ qui ne dépend du pt considéré

Le deuxième vecteur du torseur c'est un moment $\vec{\mathcal{H}} = \vec{M}$ qui dépend du pt considéré

On le note $\mathcal{T}[\vec{R}, \vec{M}]$ = Torseur

Si le torseur est connu en un pt $A \in \mathcal{E}$ alors il sera connu en n'importe quel point de $\mathcal{E}$

$\mathcal{T}(A) = [\vec{R}, \vec{M}(A)] = [\vec{R}, \vec{M}(P)]$

$$\boxed{\vec{M}(P) = \vec{M}(A) + \vec{R} \wedge \vec{AP}}$$ ppté d'antisymétrie

VII - Les pptés des torseurs

- Torseurs $\mathcal{T} = [\vec{R}, \vec{M}]$ nul

$*$ $\mathcal{T} = 0$ ssi $\begin{cases} \vec{R} = \vec{0} \text{ et } \vec{M}(P) = \vec{0} \quad \forall P \in \mathcal{E} \\ \text{ou } \vec{R} = \vec{0} \text{ et } \exists \text{ un pt } A \text{ tq } \vec{M}(A) = \vec{0} \end{cases}$

$*$ égalité de deux torseurs $\mathcal{T}_1 = [\vec{R}_1, \vec{M}_1]$

$$\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2 \mapsto \vec{R}_1 = \vec{R}_2 \text{ et } \vec{M}_1(P) = \vec{M}_2(P) \quad \forall P \in \mathcal{E}$$
$$\vec{R}_1 = \vec{R}_2 \text{ et } \exists A \in \mathcal{E} \text{ tq } \vec{M}_1(A) = \vec{M}_2(A)$$

$*$ $\mathcal{T}$ un torseur, $\lambda \in \mathbb{R} \rightarrow \lambda\mathcal{T}$ est un torseur

$$\mathcal{T} = [\vec{R}, \vec{M}] \rightarrow \lambda\mathcal{T} = [\lambda\vec{R}, \lambda\vec{M}]$$

- Comment ~~on~~ produit scalaire de 2 torseurs

$$\mathcal{T}_1 = [\vec{R}_1, \vec{M}_1] \quad , \quad \mathcal{T}_2 = [\vec{R}_2, \vec{M}_2]$$

Le produit scalaire de 2 torseurs en P est invariant.

$$\varphi(P) = (\mathcal{T}_1(P), \mathcal{T}_2(P))$$
$$= \vec{R}_1 \vec{M}_2(P) + \vec{R}_2 \vec{M}_1(P) = \text{cte}. \quad \forall P \in \mathcal{E}.$$

- Dérivée d'un torseur $\mathcal{T}_t = [\vec{R}_t, \vec{M}_t]$

Soit $\mathcal{T}$ = une famille de torseurs dépendant dependant d'un paramètre t = temps

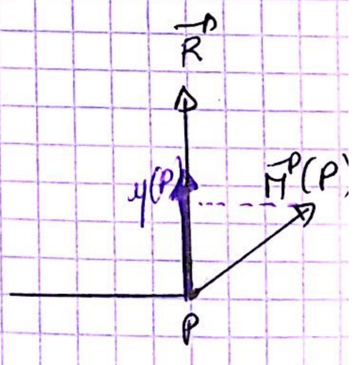
On définit la dérivée d'un torseurs $\mathcal{T}_t$ par

$$\boxed{\frac{d\mathcal{T}_t}{dt} = \left[\frac{d\vec{R}_t}{dt}, \frac{d\vec{M}_t}{dt}\right]}$$

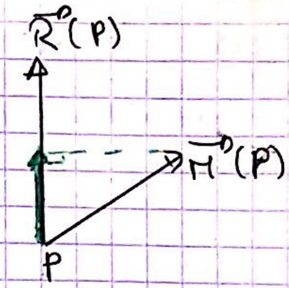
- Les invariants d'un torseur $\mathcal{T} = [\vec{R}, \vec{M}]$

i) L'invariant scalaire q

$\forall P \in \mathcal{E}$
$$\boxed{\mu(P) = \vec{R}.\vec{M}(P) = \text{cte} = \mu(Q)}$$



ii) L'invariant vectoriel $\vec{I}$:



$\forall P \in \mathcal{E}$ $$\vec{I}(P) = \frac{\vec{M}(P) \cdot \vec{R}}{\|\vec{R}\|^2} = cte.$$

iii) Axe central d'un torseur $\mathcal{T} = [\vec{R}, \vec{M}]$

C'est l'ensemble des pts $P \in \mathcal{E}$ tq le moment $\vec{m}(P)$ et $\vec{R}$ st colinéaires

$$\boxed{(\Delta) = dte = \{P \in \mathcal{E} \text{ tq } \vec{R} \wedge \vec{M}(P) = \vec{0}\}}$$

Soit O un pt $\in \mathcal{E}$ qui peut être l'origine d'un repère $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

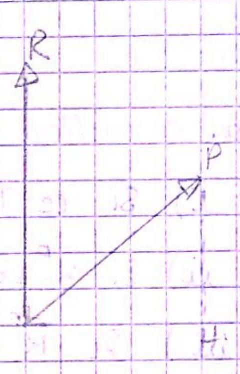
$$\vec{OP} = \left|\begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix}\right._{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}} \quad ?$$

$O \in \mathcal{E} \longrightarrow \vec{M}(P) = \vec{M}(O) + \vec{R} \wedge \vec{OP}$ ppté d'antisymetrie de $\mathcal{T}$

$$\vec{R} \wedge \vec{M}(P) = \vec{R} \wedge (\vec{M}(O) + \vec{R} \wedge \vec{OP}) = \vec{R} \wedge \vec{M}(O) + \overbrace{\vec{R} \wedge (\vec{R} \wedge \vec{OP})}^{(\vec{R} \cdot \vec{OP})\vec{R} - \|\vec{R}\|^2 \vec{OP}}$$
$$= 0$$

$$\vec{OP} = \frac{\vec{R} \wedge \vec{M}(O)}{\|\vec{R}\|^2} + \frac{(\vec{R} \cdot \vec{OP})\vec{R}}{\|\vec{R}\|^2}$$

Justifions que $\frac{\vec{R} \cdot \vec{OP}}{\|\vec{R}\|^2} = \lambda \in \mathbb{R}$



Soit $H \in$ plan passant par O et $\perp \vec{R}$

$$\vec{R} \cdot \vec{OP} = \vec{R} \cdot [\vec{OH} + \vec{HP}]$$
$$= \vec{R} \cdot \vec{OH} + \vec{R} \cdot \vec{HP} \qquad \vec{HP} \parallel \vec{R} \Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ tq } \vec{HP} = \lambda \vec{R}$$
$$\vec{R} \cdot \vec{OP} = \vec{R} \cdot \lambda \vec{R} = \lambda \|\vec{R}\|^2$$

$$\vec{OP} = \frac{\vec{R} \wedge \vec{M}(O)}{\|\vec{R}\|^2} + \lambda \vec{R}$$

Soit A un pt de $\mathcal{E}$ tq
$$\vec{OA} = \frac{\vec{R} \wedge \vec{m}(O)}{\|\vec{R}\|^2}$$
$$\vec{OP} = \vec{OA} + \lambda \vec{R} \iff \vec{OP} - \vec{OA} = \lambda \vec{R} \iff \vec{AP} = \lambda \vec{R}$$

(Δ) = la dte passant par le pt A et de direction $\parallel \vec{R}$

$\vec{AP} \parallel \vec{R} \longrightarrow \vec{AP} \wedge \vec{R} = \vec{0}$

$$\begin{vmatrix} x - x_A \\ y - y_A \\ z - z_A \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} \vec{R_x} \\ R_y \\ \vec{R_z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$\vec{AP} = \lambda \vec{R}$

$$\boxed{\frac{x - x_A}{R_x} = \frac{y - y_A}{R_y} = \frac{z - z_A}{R_z}}$$

VIII Les torseurs particulier pour lesquels l'invariant scalaire est nul

On les appelle couple ou glisseur.

a) Torseur associé à un vecteur lié $(A, \vec{R})$

Soit $(A, \vec{R})$ un vecteur lié

et $\mathcal{M}_A$ = le moment du torseur associé au vecteur lié $(A, \vec{R})$ définit

par :
i) $\vec{\mathcal{M}_A}(A) = \vec{0} = \vec{R} \wedge \vec{AA}$

ii) $\vec{\mathcal{M}_A}(P) = \vec{\mathcal{M}_A}(A) + \vec{R} \wedge \vec{AP} = \vec{R} \wedge \vec{AP} \quad \forall P \in \mathcal{E}$

b) Un torseur $\mathcal{T} = [\vec{R}, \vec{M}]$ sera un glisseur si l'une des 3 hypothèses est remplie

La condition necessaire $y(P) = 0 \quad \forall P \in \mathcal{E}$

i) Si ce torseur est associé à un vecteur lié $(A, \vec{R})$

ii) Si $\vec{R} \neq \vec{0}$ et $\exists Q \in \mathcal{E}$ tq $\vec{M}(Q) = \vec{0}$

iii) Si $\vec{R} \neq \vec{0}$ et il n'existe aucun pt $\in \mathcal{E}$ tq le moment est nul mais $\vec{R} \perp \vec{M}$

c) Le torseur est un couple $(y = 0)$ ssi l'une des deux conditions est vérifiée :

$$\begin{cases} \text{Son vecteur } \vec{R} = \vec{0} \\ \quad \text{ou} \\ \text{Son moment } \vec{M}(P) = \text{cte} \quad \forall P. \end{cases}$$

Rq Dans le cas où le torseur est un glisseur on parle du support d'un glisseur $\quad \text{Supp}(\mathcal{T}) = \{ P \in \mathcal{E} \text{ tq } \vec{M}(P) = \vec{0} \}$

exemple

Si $\mathcal{T}$ est un torseur associé au vecteur vecteur lié $(A, \vec{R})$

$$supp(\mathcal{T}) = \{ P \in \mathcal{E} \text{ tq } \vec{M}(P) = \vec{R} \wedge \vec{AP} = \vec{0} \}.$$

= dte passant par A et de direction // à $\vec{R}$

IX - Classification des torseurs

$$\mathcal{T} = [\vec{R}, \vec{M}]$$

i) cas où $y = 0$

a) $\mathcal{T} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{R} = \vec{0} \text{ et } \vec{M}(P) = \vec{0} \ \forall P \in \mathcal{E} \\ \text{ou} \\ \vec{R} = \vec{0} \text{ et } \exists Q \text{ tq } \vec{M}(Q) = \vec{0} \end{cases}$

b) i) $\vec{R} \neq \vec{0}$ et $\exists Q \in \mathcal{E}$ tq $\vec{M}(Q) = \vec{0}$. $\mathcal{T}$ est un glisseur

ii) $\vec{R} \neq \vec{0}$ et $\vec{M}(P) = \vec{0}$ $\forall P \in \mathcal{E}$ $\mathcal{T}$ sera un glisseur

iii) $\vec{R} \neq \vec{0}$ et il n'existe aucun pt tq $Q \in \mathcal{E}$ $\vec{M}(Q) = \vec{0}$ mais $\vec{R} \perp \vec{M}(Q)$

$\mathcal{T}$ est un glisseur.

c) $\vec{R} = \vec{0}$ et $\vec{M}(P) \neq \vec{0}$ $\forall P$ $\mathcal{T}$ est un couple $\mathcal{C}$

$$\vec{M}(Q) = \vec{M}(P) + \underset{\overset{\parallel}{0}}{\vec{R}} \wedge \vec{PQ} = \vec{M}(P) = cte$$

ii) Cas où $y \neq 0$

Le torseur n'est ni couple $\mathcal{C}$ ni glisseur G cependant il sera décomposable en somme d'un couple $\mathcal{C}$ et d'un glisseur G.

$$\boxed{\mathcal{T} = [\vec{R}, \vec{M}] = \underbrace{[\vec{R}, \vec{0}]}_{G} + \underbrace{[\vec{0}, \vec{M}]}_{\mathcal{C}}}$$