Université Ibn Tofaïl

Année universitaire 2017 – 2018

École Nationale
Des Sciences
Appliquées de Kénitra
(ENSAK)

Contrôle Continu

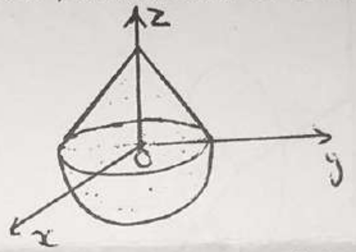
DE LA MECANIQUE DU SOLIDE

Durée : 2 Heures

Exercice1

Un solide homogène plein $S = S_1 \cup S_2$ répartie uniformément en masse, , est formé deux éléments : (voir figure ci-après)

- Un cône de révolution S_1 de hauteur h , de masse m et de rayon du grand cercle de base R.
- Une demi boule S_2 de centre O , de masse m et de rayon R extérieur au cône.

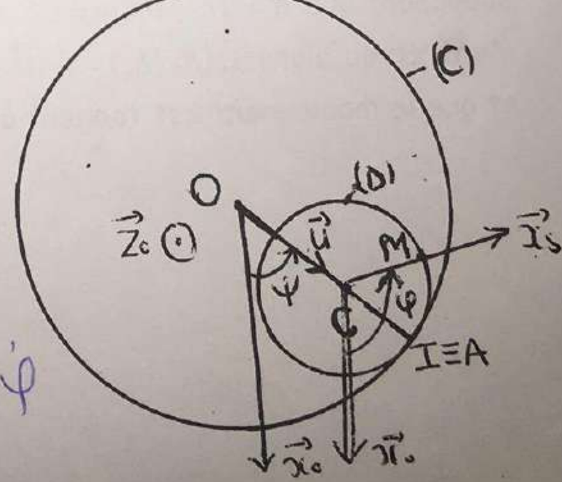


1) Déterminer la position du centre d'inertie G_1 du solide S_1.
2) Déterminer la position du centre d'inertie G_2 du solide S_2.
3) Déterminer la position du centre d'inertie G du solide $S = S_1 \cup S_2$.

Exercice 2

Un disque mince (D), de rayon a, roule sans glisser à l'intérieur d'un anneau fixe (C) . (voir figure 2). On a $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ repère fixe , $R_1(O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{z}_0)$ ou $\vec{u} = \dfrac{\vec{OC}}{\|\vec{OC}\|}$ et $\vec{v} = \vec{z}_0 \wedge \vec{u}$ et $R_S(C, \vec{x}_S, \vec{y}_S, \vec{z}_S)$ repère lié au solide(D)

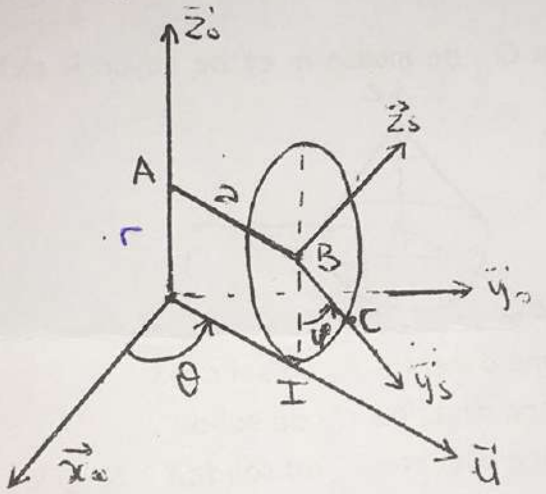
1) Paramétrer la position du disque et préciser son nombre de degrés de liberté .
2) Déterminer la vitesse de glissement du disque (D) par rapport à l'anneau (C) et déduire une équation holonome traduisant la condition de roulement sans glissement.
3) Déterminer le vecteur accélération $\vec{\gamma}(A \in D/R_0)$.



$\dot{\psi}\,\vec{z}_0 + \dot{\varphi}$

Exercice 3

On considère (figure 3) le système (S) formé d'une tige horizontale $(T)=(AB)$, de longueur a et d'un disque circulaire vertical (D), perpendiculaire à AB, de centre B et de rayon r, en mouvement dans un repère absolu $R_0(O,\ \vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$. Le point A est fixé sur l'axe $(O,\ \vec{z}_0)$ à la distance r de O. Soit I le point disque en contact avec le plan horizontal $(O,\ \vec{x}_0,\vec{y}_0)$; et I^* le point géométrique de contact. On appellera $(O,\ \vec{u})$ l'axe déterminé par le vecteur OI^*, $(O,\ \vec{v})$ l'axe tel que le trièdre $(O,\vec{u},\vec{v},\vec{z}_0)$ soit direct, et $(B,\ \vec{y}_S)$, $(B,\ \vec{z}_S)$ deux axes orthogonaux liés au disque et situés dans son plan. Soit C le point du disque tel que $BC=r\ \vec{y}_S$.
On note $\theta=(\widehat{\vec{x}_0,\vec{u}})$, mesuré autour de $\vec{z}_0$ et $\varphi=(\overrightarrow{BI^*},\vec{y}_S)$, mesuré autour de $\vec{u}$.
On appellera R^* le repère $(O,\vec{u},\vec{v},\vec{z}_0)$, R_S le repère $(B,\vec{x}_S=\vec{u},\vec{y}_S,\vec{z}_S)$ et R_0 le repère $(O,\ \vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$.



1) Calculer les vecteurs rotation $\vec{\Omega}(R^*/R_0)$, $\vec{\Omega}(R_S/R^*)$ et $\vec{\Omega}(R_S/R_0)$.

2) Calculer les vecteurs $\vec{V}(I^*/R_0)$, $\vec{V}(I^*/R^*)$ et $\vec{V}(I^*/R_S)$. Déterminer les trajectoires de I^* dans R_S et dans R_0.

3) Etude du mouvement de R_S par rapport à R_0 : déterminer $\vec{V}(C\in D/R_0)$, $\vec{V}(I\in D/R_0)$, $\vec{V}(I\in D/R^*)$ et $\vec{\gamma}(I\in D/R_0)$.

4) Ecrire la condition de roulement sans glissement en I et l'intégrer, en supposant que $a=2r$, $\dot{\theta}=\omega=C^{te}$ et que à $t=0$ on a $\theta=0$ et $\varphi=0$.
Montrer qu'alors $\vec{\Omega}(R_S/R_0)=\lambda\ \overrightarrow{AI}$, où λ est une constante que l'on déterminera et que le mouvement est tangent à une rotation autour de $\overrightarrow{AI^*}$.

Année universitaire 2017 – 2018

École Nationale
Des Sciences
Appliquées de Kénitra
(ENSAK)

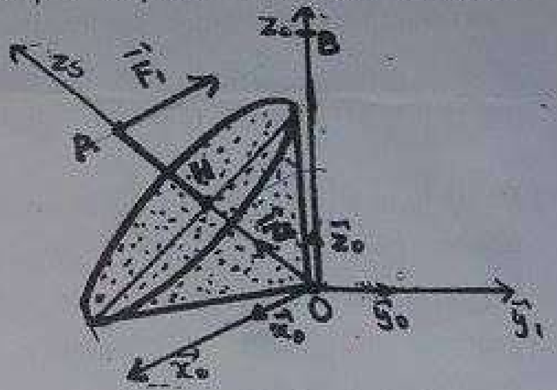
EXAMEN DE LA MECANIQUE DU SOLIDE

Durée : 2 Heures

PROBLEME

Un cône de révolution (S), homogène et plein de masse M, de sommet O, de centre de masse G et d'axe $(O;\vec{z}_S)$, a une base de rayon a et de centre H tel que $OH=\frac{a}{2}$. Le sommet O du solide (S) est maintenu fixe dans le repère fixe orthonormé direct $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ ($\vec{z}_0$ *vertical ascendant*) au moyen d'un bâti convenable. Une tige rectiligne HA rigide et sans masse, est soudée au cône (S) en H et dirigée suivant l'axe du cône, de sorte que $\vec{OA}=a\,\vec{z}_S$. Soit B le point défini par $\vec{OB}=a\,\vec{z}_0$. Le point A est attiré par le point B suivant la force $\vec{F}_1=k\,\vec{AB}$ (k est une constante positive).

La réaction du bâti en O se limite à une force unique $\vec{F}_2$, et le cône plongé dans le champ de pesanteur uniforme et constant $\vec{g}$. (voir figure ci-après)



Soit $R_S(G, x_S, y_S, z_S)$ orthonormé direct de base $(\vec{x}_S, \vec{y}_S, \vec{z}_S)$ et lié à S. La position de (S) dans $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ est repérée par les angles d'Euler habituels ψ, θ et φ et $\vec{OG}=h\,\vec{z}_S$ (h est en fonction de a seulement).

On note $\vec{v}=\vec{z}_0\wedge\vec{u}$ et $\vec{w}=\vec{z}_S\wedge\vec{u}$

avec l'angle $\psi=(\vec{x}_0,\vec{u})=(\vec{y}_0,\vec{v})$ mesuré autour de $\vec{z}_0$,l'angle $\theta=(\vec{z}_0,\vec{z}_S)=(\vec{v},\vec{w})$ mesuré autour $\vec{u}$ et $\varphi=(\vec{u},\vec{x}_S)=(\vec{w},\vec{y}_S)$ mesuré autour de $\vec{z}_S$.

On donne la matrice d'inertie $I(O,S)$ dans la base $(\vec{x}_S, \vec{y}_S, \vec{z}_S)$:

$$I(O,S)=\begin{bmatrix} C & 0 & 0 \\ 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix} \quad \text{avec } C=\frac{3}{10}Ma^2 \text{ et } C \text{ inconnue}$$

Tous les résultats de ce problème seront exprimés dans la base $(\vec{u}, \vec{w}, \vec{z}_S)$.

1) Déterminer la position du centre de masse G du solide (S) en fonction de a seulement.

2) Déterminer les expressions des vecteurs vitesse $\vec{V}(A \in S/R_0)$, vitesse $\vec{V}(G \in S/R_0)$ et accélération $\vec{\gamma}(A \in S/R_0)$ du point A et G dans son mouvement par rapport à R_0.

3) Justifier l'écriture de la matrice d'inertie $I(O, S)$ et montrer que $C' = C$

4) Déterminer le moment cinétique au point A du solide (S) dans son mouvement par rapport à R_0 noté $\vec{L}(A, S/R_0)$.

5) Déterminer l'énergie cinétique du solide (S) dans son mouvement par rapport à R_0 noté $E_C(S/R_0)$.

6) Déterminer l'expression vectorielle du moment en O des forces extérieures s'exerçant sur le cône, noté $\vec{M}\left(O, \Sigma\vec{F}_{forces\ extérieures}\right)$.

7) Déterminer la puissances développée par ces efforts noté $P\left(\Sigma\vec{F}_{forces\ extérieures}\right)$.

8) En utilisant le théorème de la puissance et l'énergie potentielle du système donnée par $E_p(S/R_0) = \left(Mgh - ka^2\right)\cos(\theta) + constante$, montrer que le système (S) est conservatif ou isolé c'est-à-dire qu' on a la conservation de l'énergie mécanique. En déduire l'équation de l'intégrale première de l'énergie mécanique.

9) En appliquant le théorème du moment cinétique au cône (S) en O et en projetant cette équation vectorielle suivant des axes convenablement choisis, trouver deux intégrales premières ou deux équations de mouvement liant les angles d'Euler et leurs dérivés premiers.

10) A quelles conditions sur $\dot{\psi}$ et $\dot{\varphi}$ peut-il se produire des mouvements au cours desquels la tige reste horizontale c'est-à-dire $\theta = 90°$?
(Indication : il sera nécessaire de calculer $\vec{D}(O, S/R_0).\vec{u}$ ou $\vec{D}(O, S/R_0)$ est le moment dynamique au point O du solide (S) dans son mouvement par rapport à R_0).