Année universitaire 2016 – 2017

École Nationale
Des Sciences
Appliquées de Kénitra
(ENSAK)

Devoir Surveillé

DE LA MECANIQUE DU SOLIDE

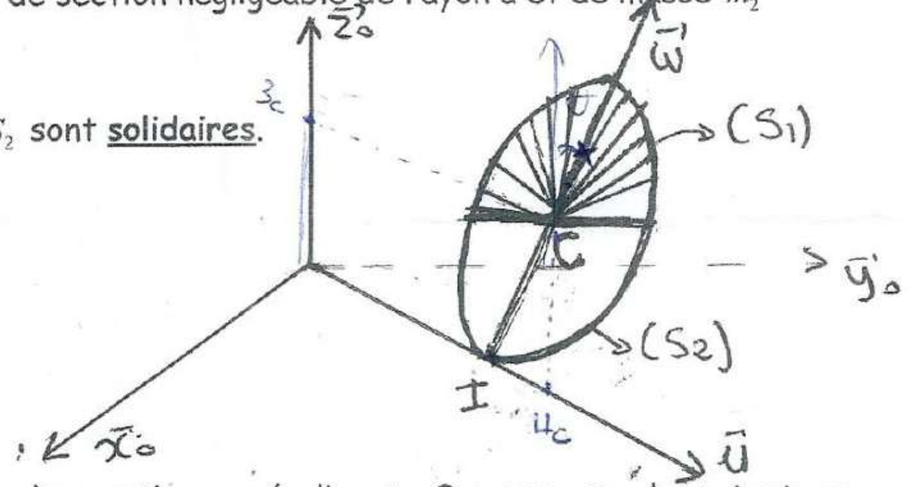
Durée : 2 Heures

Exercice1

Un solide homogène $S = S_1 \cup S_2$ répartie uniformément en masse, , est formé deux éléments : (voir figure ci-après)

- Un demi disque S_1 de rayon a d'épaisseur négligeable et de masse m_1.
- Un demi cerceau S_2 de section négligeable de rayon a et de masse m_2 (avec $m_2 = \frac{2}{3} m_1$).

Les deux éléments S_1 et S_2 sont **solidaires**.



Soit $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ un repère orthonormé direct. On suppose, dans tout ce problème que $S = S_1 \cup S_2$ reste en contact du plan $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0)$ en un point I. On repère la position de $S = S_1 \cup S_2$ dans R_0 à l'aide des coordonnées x, y de la projection orthogonale de C sur $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0)$ et les angles d'Euler habituels ψ, θ et φ. Le solide $S = S_1 \cup S_2$ est dans le plan $(I, \vec{u}, \vec{w})$.

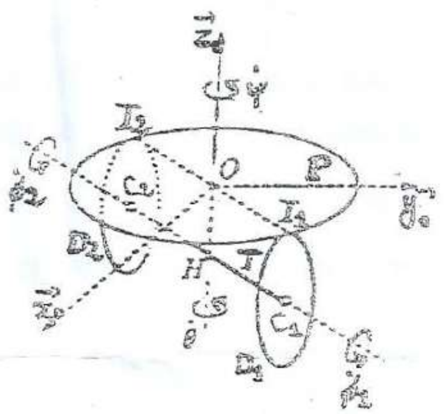
1) Déterminer la position du centre d'inertie G du solide $S = S_1 \cup S_2$.
2) Calculer par leurs composantes dans la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{z}_0)$ les vitesse suivantes : $\vec{V}(C \in S/R_0)$, $\vec{V}(I \in S/R_0)$, $\vec{V}(I/R_0)$, $\vec{V}(I/R_S)$, $\vec{V}(C \in S/(I, \vec{u}, \vec{v}, \vec{z}_0))$ et $\vec{V}(I \in S/(I, \vec{u}, \vec{v}, \vec{z}_0))$ avec $R_S(G, \vec{x}_S, \vec{y}_S, \vec{z}_S)$ le repère lié au solide $S = S_1 \cup S_2$.
3) Déterminer la vitesse de glissement du solide $S = S_1 \cup S_2$ sur le plan $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0)$ au point de contact I. Donner les équations traduisant la

condition de roulement sans glissement du solide $S = S_1 \cup S_2$ sur le plan $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0)$.

4) Calculer la matrice d'inertie du solide $S = S_1 \cup S_2$ en C exprimée dans la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{z}_S)$.

Exercice 2

Un plateau circulaire (P), est mis en rotation autour de son axe, grâce à un système constitué d'une tige (T), de longueur 2l, aux extrémités de laquelle sont articulés deux disques identiques D_1 et D_2 de rayon r. La tige est perpendiculaire à l'axe de rotation et son centre est situé sur cet axe sous le plateau, à la distance r de (P)
(voir figure ci-après).



Le plateau, la tige et les deux disques sont des solides homogènes. On note $\dot{\psi}$ et $\dot{\theta}$ les vitesses de rotations du plateau (P) et de la tige (T) respectivement par rapport au référentiel du laboratoire $R_0(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ et on désigne par $\dot{\phi}_1$ et $\dot{\phi}_2$ les vitesses de rotations de D_1 et D_2 par rapport à la tige (T).

1) Quelles sont les expressions des vecteurs vitesses de rotations $\vec{\Omega}_{D_1/R_0}$ et $\vec{\Omega}_{D_2/R_0}$ des deux disques D_1 et D_2 par rapport à $R_0(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$? Que se passe-t-il si on bloque le mouvement de la tige (T) ?

2) Ecrire les équations, reliant $\dot{\psi}$, $\dot{\theta}$, $\dot{\phi}_1$ et $\dot{\phi}_2$ qui traduisent le roulement sans glissement de D_1 et D_2 sur le plateau (P) ? En déduire une relation entre $\dot{\phi}_1$ et $\dot{\phi}_2$.

3) On bloque le plateau. Exprimer dans ce cas de $\dot{\theta}$ en fonction de $\dot{\phi}_1$ ou en fonction de $\dot{\phi}_2$. Que deviennent alors $\vec{\Omega}_{D_1/R_0}$ et $\vec{\Omega}_{D_2/R_0}$?

Université Ibn Tofail

École Nationale
Des Sciences
Appliquées de Kénitra
(ENSAK)

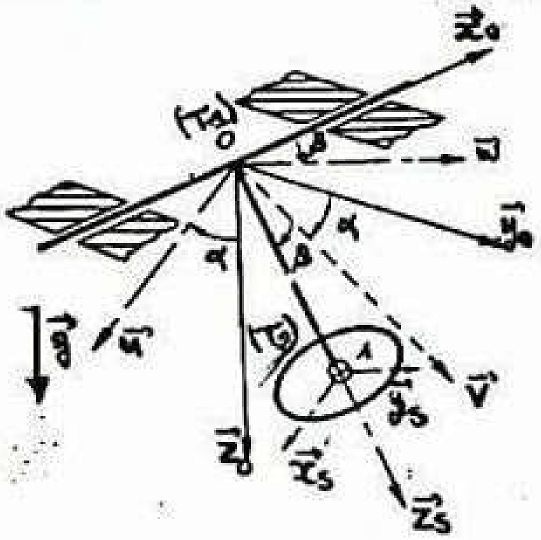
Année universitaire 2016 – 2017

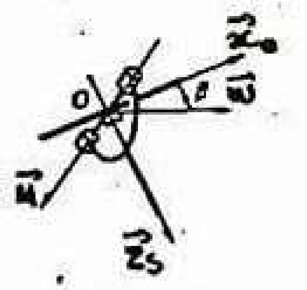
EXAMEN DE LA MECANIQUE DU SOLIDE

Durée : 2 Heures

Exercice I

Soit $R_0(O, x_0, y_0, z_0)$ de base $(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ un repère orthonormé direct lié au sol, considéré comme galiléen, l'axe Oz_0 étant ici vertical descendant et O étant un point fixe. On étudie un solide (S) formé de 3 éléments schématisé ci-après :





Détail en O

iv) Une tige rigide (T_1), de masse négligeable tourne autour de son axe Ox_0 à l'aide d'une liaison parfaite avec le bâti galiléen . le repère $R_{T_1}(O, \vec{u}, \vec{x}_0, \vec{v})$ est lié à la tige (T_1) et on pose $(\widehat{Oy_0, Ov}) = (\widehat{Oz_0, Ou}) = \alpha$

v) Une autre tige rigide (T_2), d'extrémité O et A , de masse négligeable et de longueur d tourne autour de l'axe Ou ; la liaison entre (T_1) et (T_2) schématisée sur le détail de la figure ci-dessous, est parfaite. Le repère $R_{T_2}(O, \vec{u}, \vec{w}, \vec{z}_S)$ est lié à la tige (T_2) et on pose $(\widehat{Ov, Oz_S}) = (\widehat{Ox_0, Ow}) = \beta$.

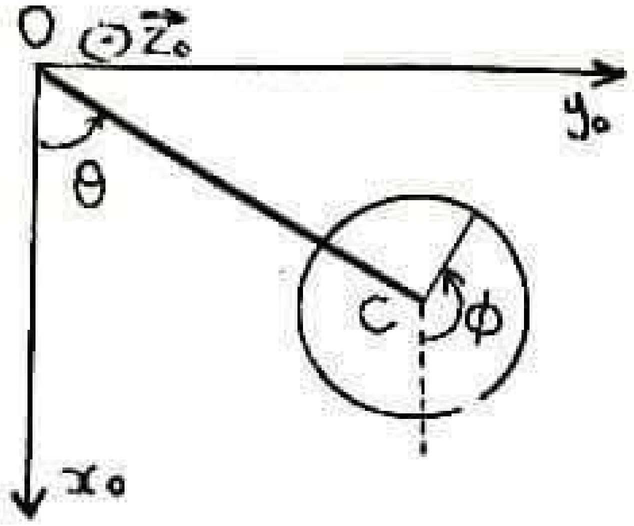
vi) Un disque (D) situé dans le plan $(A\vec{x}_S, A\vec{y}_S)$ orthogonal à $O\vec{z}_S$ plein et homogène , a pour centre A, pour masse M et pour rayon a. On suppose qu'il a une épaisseur négligeable. Son mouvement par rapport à la tige (T_2) est une rotation autour de $O\vec{z}_S$. La liaison en A étant elle aussi parfaite.

Un petit moteur électrique de masse négligeable est monté entre (T_2) et (D) et maintient la vitesse de rotation de (D) autour de (T_2) constante et égale à ω.

1) Justifier que la matrice d'inertie en O du solide (S) dans le repère approprié est donnée par : $I(O,S)=\begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{bmatrix}$ où $A_1 = M\left[d^2+\frac{a^2}{4}\right]$ et $C_1 = \frac{Ma^2}{2}$.
2) Expliciter par ses composantes dans la base du repère $R_{T_1}(O,\vec{u},\vec{w},\vec{z}_S)$, le vecteur rotation instantané $\vec{\Omega}_{D/R_0}$ du disque (D) par rapport à R_0.
3) Calculer le moment cinétique du solide (S) au point O dans mouvement par rapport à R_0.
4) En déduire le moment dynamique du solide (S)au oint O dans mouvement par rapport à R_0.(On désignera par L_T, M_T et N_T les composantes du moment dynamique dans la base de R_{T_2}.
5) Calculer le moment des forces de pesanteur appliquées à (S) dans R_0 au point O.
6) En utilisant pour le solide (S) le fait que le moment des forces de liaison extérieures est orthogonal à Ox_0, montrer par application du théorème du moment cinétique au solide (S) la relation suivante :
$$M_T \cos\beta - N_T \sin\beta = M g d \cos\alpha \cos\beta$$
7) En supposant que les forces appliquées au disque (D) dans R_0 sont uniquement des forces de pesanteur et le couple moteur C ($\vec{M}(O,\vec{F}_{\text{des forces de liaison}}) = C\,\vec{z}_S$); montrer par application du théorème du moment cinétique au disque (D) dans mouvement par rapport à R_0, l'équation suivante : $C=-\frac{Ma^2}{2}\left[\alpha \sin\beta + \alpha\,\beta \cos\beta\right]$

Exercice II

Le solide (S) de la figure ci-après se compose d'une tige (S_1) de masse m et de longueur d et d'un disque (S_2) de centre C, de masse M et de rayon a en mouvement dans le plan $(x_0\,O\,y_0)$ du référentiel comme galiléen . Les liaisons aux points O et C sont supposées parfaites. Initialement à $t = 0$ $\theta = \theta_0$ et $\dot{\phi} = \omega_0$.



1) Déterminer l'énergie cinétique du solide (S) dans son mouvement par rapport à $R_0(O, x_0, y_0, z_0)$.

2) Déterminer l'énergie potentielle du solide (S) dans mouvement par rapport à $R_0(O, x_0, y_0, z_0)$. En déduire l'énergie mécanique du système formé par la tige et le disque en mouvement par rapport à $R_0(O, x_0, y_0, z_0)$.

3) En appliquant le théorème du moment cinétique au disque (S_2) au point C dans son mouvement par rapport à R_0 , montrer que la vitesse de rotation de (S_2) par rapport à R_0 est constante. On suppose que les actions de contact aux points O et C se réduisent aux forces de réaction.

4) A l'aide de la variation d'énergie mécanique du système (S) en mouvement par rapport à R_0 ,trouver l'équation différentielle du mouvement , puis en déduire la période T des petites oscillations.