Année universitaire 2015 – 2016

Pr M.BENBRAHIM

École Nationale
Des Sciences
Appliquées de Kénitra
(ENSAK)

Contrôle continu

DE LA MECANIQUE DU SOLIDE

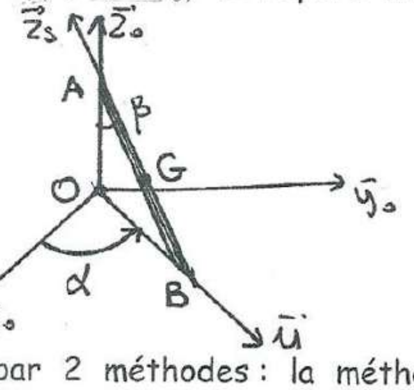
Durée : 2 Heures

Exercice 1

Soit $R_0(O,\ x_0, y_0\ , z_0)$ de base $(\vec{x}_0, \vec{y}_0\ , \vec{z}_0)$ un repère orthonormé direct. Une tige rectiligne AB , de longueur L, est mobile dans $R_0(O,\ x_0, y_0\ , z_0)$ de façon que A se déplace sur (O ; $\vec{z}_0$), B se déplace dans le plan (Ox_0, Oy_0) ; on suppose que B ne revient jamais en O et que le montage permet pour la côte de A des valeurs positives et négatives.

On pose $\vec{u} = \dfrac{\overrightarrow{OB}}{\|\overrightarrow{OB}\|}$, $\vec{v} = \vec{z}_0 \wedge \vec{u}$, $\overrightarrow{BA} = l\ \vec{z}_S$, $\vec{w} = \vec{v}' \wedge \vec{z}_S$

La position de la tige dans $R_0(O,\ x_0, y_0\ , z_0)$ est repérée par les paramètres : l'angle $\alpha = (\vec{x}_0\ , \vec{u}) = (\vec{y}_0, \vec{v})$ mesuré autour de $\vec{z}_0$ et l'angle $\beta = (\vec{z}_0, \vec{z}_S) = (\vec{u}, \vec{w})$ mesuré autour $\vec{v}' = -\vec{v}$. On désigne par $R_1(O; \vec{u}, \vec{v}, \vec{z}_0)$ le repère mobil par rapport à $R_0(O,\ \vec{x}_0, \vec{y}_0\ , \vec{z}_0)$.

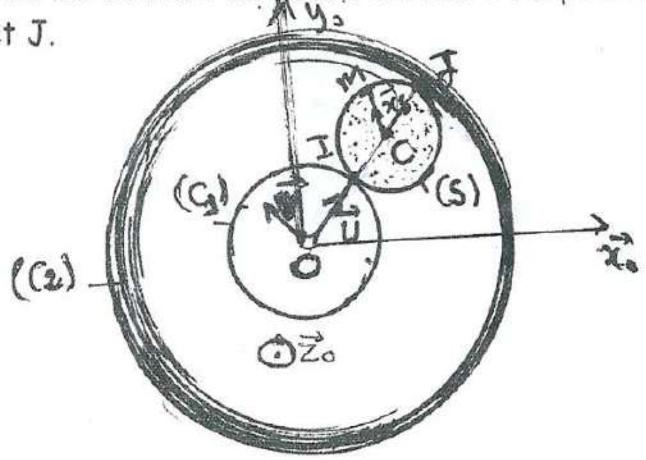


1) Calculer le vecteur vitesse $\vec{V}(A/R_0)$
2) Calculer le vecteur vitesse $\vec{V}(B/R_0)$ par 2 méthodes : la méthode de composition de mouvement et méthode de dérivation directe du vecteur position.
3) Calculer le vecteur accélération $\vec{\gamma}(B/R_0)$ par la méthode de composition de mouvement .
4) En utilisant $\vec{V}(A \in S/R_0) = \dfrac{d(\overrightarrow{OA})}{dt}\Big/R_0$ déterminer la vitesse du centre de masse G du solide $\vec{V}(G \in S/R_0)$ exprimée dans la base de $R_1(O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{z}_0)$.
5) Soit P un point mobile sur la tige repéré par $\overrightarrow{BP} = \lambda\ \vec{z}_S$ $\lambda = \lambda(t)$ variable
   a) Calculer $\vec{V}(P \in S/R_1)$ et $\vec{V}(P \in S/R_0)$.
   b) Indiquer comment on calculerait $\vec{\gamma}(P \in S/R_1)$ et $\vec{\gamma}(P \in S/R_0)$?

Exercice 2

Un cylindre (C_1) de rayon R_1 est en rotation à vitesse angulaire Ω_1 autour de son axe de symétrie matérielle (Oz_0) , dans le référentiel cartésien $R_0(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$. Un second cylindre (C_2) coaxial de rayon R_2 tourne autour du même axe à vitesse angulaire Ω_2.(voir figure 2). Des billes de diamètre $d = R_2 - R_1$ sont placées entre ces 2 cylindres . On ne se préoccupe pas d'états de surface , de jeux ; en supposant tous ces solides géométriquement parfait.

On se propose d'étudier la cinématique du mouvement d'une des billes (S) , en supposant que les points de contact de cette dernière respectivement avec (C_1) et (C_2) sont I et J.



1) Ecrire la condition de roulement sans glissement de la bille (S) respectivement sur (C_1) au point de contact I et sur (C_2) au point de contact J).

2) Déduire de la question précédente :
   a) la direction du vecteur vitesse instantanée de rotation de la bille $\vec{\Omega}_{S/R_0}$ dans son mouvement par rapport à $R_0(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$.
   b) L'expression de la vitesse de rotation instantanée Ω_{S/R_0} en fonction des rayons R_1 , R_2 et les vitesses angulaires des deux cylindres Ω_1 et Ω_2 .

3) Déterminer le torseur cinématique de de la bille dans son mouvement par rapport à R_0 au point C. En déduire la norme de la vitesse de C par rapport à R_0 en fonction des rayons R_1 , R_2 et les vitesses angulaires des deux cylindres Ω_1 et Ω_2 .

4) Calculer la vitesse et l'accélération d'un point M de la périphérie de la bille (S) repéré par $\vec{CM} = d\,\vec{x}_S$. (avec $\vec{x}_S$ un vecteur unitaire lié à la bille (S))

Université Ibn Tofaïl

École Nationale
Des Sciences
Appliquées de Kénitra
(ENSAK)

Année universitaire 2015 – 2016

EXAMEN DE LA MECANIQUE DU SOLIDE

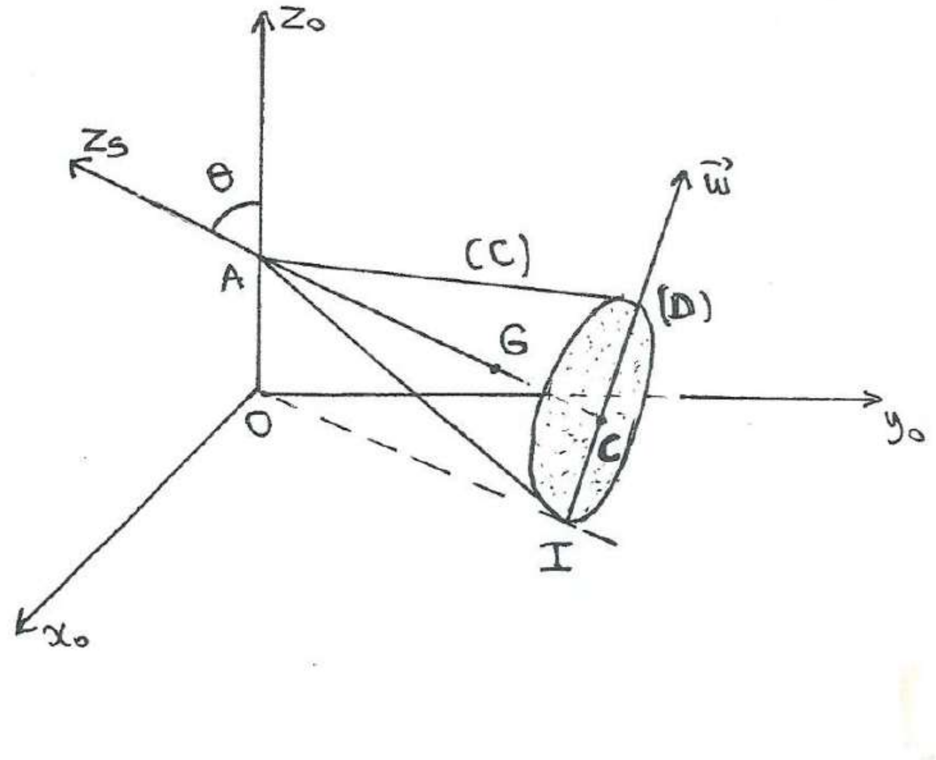
Durée : 2 Heures

PROBLEME

Un solide de révolution S ,homogène est constitué par un cône (C) de hauteur $h = AC$ et un disque (D) solidaire sur la base du cône , de centre C et de rayon a (voir figure). On note M la masse de $S = (C) \cup (D)$, G son centre de masse et σ sa densité massique surfacique (le cône présente une distribution massique sur la surface vide à l'intérieur)

S est en contact du plan (Ox_0, Oy_0) du repère $R_0(O, x_0, y_0, z_0)$ de base $(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$, en un point I, et son sommet A est astreint , par une liaison non précisée , à rester sur la partie $z > 0$ de l'axe Oz_0. On étudie le mouvement dans une phase ou les contacts de S avec $R_0(O, x_0, y_0, z_0)$ ont lieu uniquement en I et A . Le repère $R_S(G, x_S, y_S, z_S)$ orthonormé direct de base ($\vec{x}_S, \vec{y}_S, \vec{z}_S$) et lié à S.

.La position de S dans $R_0(O, x_0, y_0, z_0)$ est repérée par les angles d'Euler habituels ψ, θ et φ .



A) Cinématique

1) Calculer la côte z de A dans R_0.
2) Calculer par leurs composantes dans la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{z}_0)$.la vitesse $\vec{V}(C \in S/R_0)$ du point C lié à S par rapport à R_0 puis la vitesse $\vec{V}(I \in S/R_0)$ du point de contact entre le solide S et le plan (Ox_0, Oy_0). Cette vitesse a-t-elle une signification particulière ?
3) Calculer dans la même base que précédemment $\vec{V}(I/S)$ vitesse du point géométrique I par rapport à R_S et en déduire $\vec{V}(I/R_0)$.
4) Montrer que les conditions de glissement nul en I sont données par : $\theta = \theta_0$ et $a\,\varphi + \psi\,(a\cos\theta_0 - h\sin\theta_0) = constante$

B) Cinétique et dynamique :

On désigne par A_1 et C_1 les moments principaux d'inertie en G de S (C_1 moment d'inertie par rapport à $(G, \vec{z}_S)$)

1) Calculer $\overrightarrow{CG}$ sachant que le cône et le disque ont une même masse m.

Exprimer dans la suite tous les résultats dans la base $(\vec{u}, \vec{w}, \vec{z}_S)$

2) Calculer par rapport à R_0 les éléments cardinaux de réduction au point A du torseur cinétique du solide S.
3) Montrer que les deux projections du moment dynamique sont données par :

$$\vec{D}(A, S/R_0).\,\vec{z}_0 = \frac{d\left[\left(A_1 + \frac{25}{36}Mh^2\right)\dot{\psi}\sin^2\theta \; + \; C_1(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta)\cos\theta\right]}{dt}$$

$$\vec{D}(A, S/R_0).\,\vec{z}_S = \frac{d\left[\;C_1(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta)\right]}{dt}$$

4) Calculer l'énergie cinétique de S en mouvement dans R_0.
5) Les actions extérieures exercées sur S sont :

- Le champ de la pesanteur $\vec{g} = -g\,\vec{z}_0$
- La réaction du plan (Ox_0, Oy_0) sur S, définie par un glisseur dont le support passe par I et de vecteur $\vec{R}_I = R_I\,\vec{z}_0$.
- L'action d'un dispositif non précisé , définie par un glisseur dont le support passe par A et de vecteur $\vec{F} = -K\,\overrightarrow{OA}$ (K une constante positive)

Déterminer deux équations du mouvement de S à l'aide du théorème du moment cinétique appliqué au point A.

Année universitaire 2015 – 2016
Pr BENBRAHIM

Examen de rattrapage de la mécanique du solide (durée 2h)

École Nationale
Des Sciences
Appliquées Kénitra
(ENSAK)

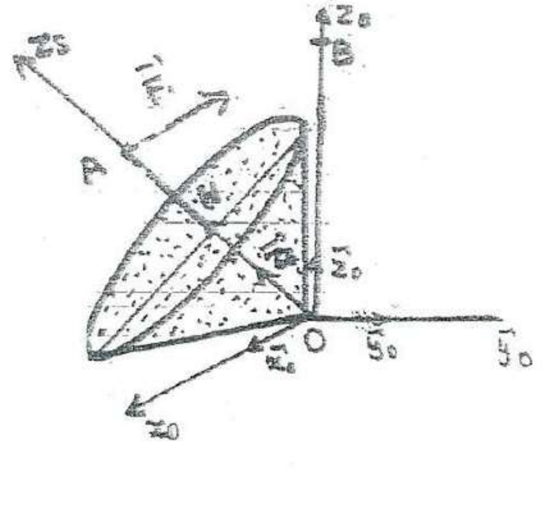
Problème

Un cône de révolution de révolution (S), homogène et plein de masse m, de sommet O d'axe (Oz_0), a une base de rayon a et de centre H tel que $2.OH = a$. Le sommet O de (S) est maintenu fixe dans le repère fixe orthonormé direct $R_0(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ ($\vec{z}_0$ *vertical ascendant*) au moyen d'un bâti convenable. Une tige réctiligne HA rigide et sans masse, est soudée au cône (S) en H et dirigée suivant l'axe du cône, de sorte que $\overrightarrow{OA} = a\,\vec{z}_S$. Soit B le point défini par $\overrightarrow{OB} = a\,\vec{z}_0$. Le point A est attiré par B suivant la force $\vec{F}_1 = k\,\overrightarrow{AB}$ (k est une constante positive). La réaction du bâti en O se limite à une force unique $\vec{F}_2$, et le cône est dans le champ de pesanteur uniforme et constant $\vec{g}$.

Soit $R_S(\vec{x}_S, \vec{y}_S, \vec{z}_S)$ le repère lié au solide (S). On repère la position de S dans R_0 par les angles d'Euler ψ, θ, φ et $\overrightarrow{OG} = h\,\vec{z}_S$. (h est une fonction de a)

On note $\vec{z}_0 \wedge \vec{u} = \vec{v}$ et $\vec{z}_S \wedge \vec{u} = \vec{w}$ avec $\psi = (\widehat{\vec{x}_0, \vec{u}})$. On donne la matrice d'inertie $I(O, S)$ dans la base $(\vec{x}_S, \vec{y}_S, \vec{z}_S)$ ou dans la base $(\vec{u}, \vec{w}, \vec{z}_S)$

$$I(O, S) = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & 0 \\ 0 & C_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{bmatrix}$$



Les résultats seront exprimés dans la base $(\vec{u}, \vec{w}, \vec{z}_S)$

1) Déterminer la position du centre de masse G du solide S en fonction de a seulement.

2) Déterminer les expressions des vecteurs vitesse $\vec{V}\left(A \in {(S)}/{R_0}\right)$ et vecteur accélération $\vec{\gamma}\left(A \in {(S)}/{R_0}\right)$ dans son mouvement par rapport à R_0.

3) ~~Calculer les moments d'inertie principaux du solide~~ C_1, C_2 et C_3. En déduire que $C_1 = C_2 = C_3 = C$.

4) Déterminer au point A le moment cinétique du solide (S) dans son mouvement par rapport à R_0, noté $\vec{L}(A, (S)/R_0)$.

5) Déterminer l'énergie cinétique du solide dans son mouvement par rapport à R_0, noté $E_c((S)/R_0)$

6) Déterminer l'expression vectorielle du moment en O des forces extérieures s'exerçant sur le cône, noté $\vec{M}\left(O, \sum \vec{F}_{extérieures}\right)$.

7) En appliquant le théorème du moment cinétique au cône (S) en O et en projetant cette équation vectorielle suivant des axes convenablement choisis, trouver deux intégrales premières ou deux équations de mouvement liant les angles d'Euler et leurs dérivés premiers.

8) A quelle condition sur le produit de $\dot{\psi}$ et $\dot{\phi}$, peut-il se produire des mouvements à $\theta = \frac{\pi}{2}$?

(indication : il sera nécessaire de calculer $\vec{D}\left(O, {S}/{R_0}\right) . \vec{u}$)