Année universitaire 2014 – 2015

École Nationale
Des Sciences
Appliquées de Kénitra
(ENSA)

Examen de la Mécanique Du solide (Durée : 2 h)

Un solide S homogène constitué de deux solides S_1 et S_2 (Fig-1)

- S_1 est une demi-sphère creuse, de masse m , de centre O , de rayon a et de centre d'inertie G_1 : $\overrightarrow{OG_1} = \frac{a}{2}\overrightarrow{z_S}$
- S_2 est une tige GP de section négligeable , de masse m , de longueur a , de centre G_2 : $\overrightarrow{OG_2} = \frac{3a}{2}\overrightarrow{z_S}$ et solidaire à S_1 en G .

L'extrémité de S_2 est fixé en P de l'axe O_1Z_0 vertical fixe du repère galiléen $T_1(O_1, X_0, Y_0, Z_0)$ de base $(\vec{x_0}, \vec{y_0}, \vec{z_0})$ tel que $\overrightarrow{O_1P} = h\,\overrightarrow{z_0}$ (h = constante $h > 2a$)

On repère la position du solide par les angles d'Euler habituels ψ, θ et φ.
Les résultats seront exprimés dans la base de $R_2(\vec{u}, \vec{w}, \vec{z}_s)$

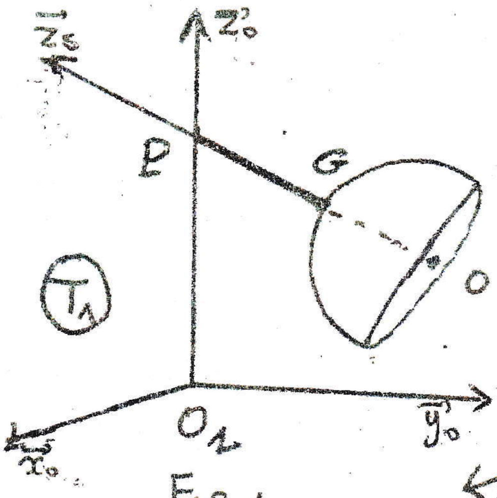

Fig-1-

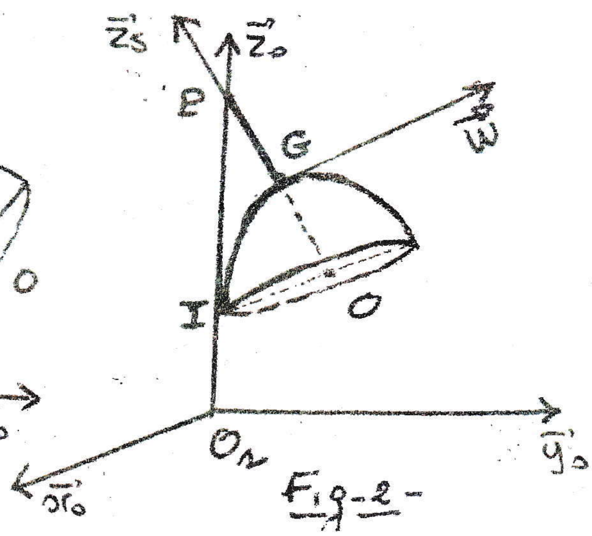

Fig-2-

A) Cinématique :

1) a) Déterminer le torseur cinématique au point G de S dans son mouvement par rapport à T_1 (G centre d'inertie de S)

   b) Calculer l'accélération de G dans son mouvement par rapport à T_1 : $\vec{\gamma}(G \in S/T_1)$

2)Dans l'hypothèse ou la demi-sphère S_1 est en contact au point I de l'axe O_1Z_0 (I point géométrique de contact) Fig 2

a) Déterminer les degrés de liberté du solide $S = S_1 \cup S_2$. Vérifier que $\theta = \theta_0 = Tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$

b) Déterminer la condition de roulement sans glissement de S sur O_1Z_0 au point I.

B) **Cinétique** :

1) a) La matrice d'inertie de S_1 en G_1 exprimée dans la base de $R_2(\vec{u}, \vec{w}, \vec{z}_s)$ est diagonale avec $A_1 = B_1 = \frac{5ma^2}{12}$; $C_1 = \frac{2ma^2}{3}$.

Justifier par le calcul, les expressions de A_1, B_1 et C_1 .

b)La matrice d'inertie de S_2 en G_2 exprimée dans la base de $R_2(\vec{u}, \vec{w}, \vec{z}_s)$ est diagonale avec $A_2 = B_2 = \frac{ma^2}{12}$; $C_0 = 0$

Justifier les expressions de A_2, B_2 et C_2 .

c) Calculer la matrice d'inertie de $S = S_1 \cup S_2$ en P dans la base de $R_2(\vec{u}, \vec{w}, \vec{z}_s)$.

Par la suite , on notera les moments principaux de S dans la base de $R_2(\vec{u}, \vec{w}, \vec{z}_s)$ par A, A, et C.

2) a) Déterminer l'expression vectorielle du moment cinétique au point P du solide S dans son mouvement par rapport à T_1 .

b)Déterminer l'énergie cinétique du solide S dans son mouvement par rapport à T_1 .

c)Dans l'hypothèse de la question A) 2) Fig2, déterminer le moment dynamique de S au point P dans son mouvement par rapport à T_1.

C) **Dynamique et énergétique :**

Le système est dans le champ de la pesanteur . L'axe O_1Z_0 est maintenant supposé non matérialisé (Fig.1) . En plus de la force de la pesanteur , le solide $S = S_1 \cup S_2$ est soumis à une force $\vec{F} = -K\sin(\theta)\vec{v}$ (K est constante), exercée en P.($\vec{v}$ vecteur unitaire de la base $R_1(\vec{u}, \vec{v}, \vec{z}_0)$)

a) Ecrire le théorème du principe fondamentale de la dynamique torsoriel au solide S dans le repère T_1.
b) Déterminer en P le moment des forces extérieures qui s'exercent sur S .
c) En projetant l'une des deux équations vectorielles de C) a) , suivant deux axes convenablement choisis, déterminer deux équations de mouvement.
d) En appliquant le théorème de la puissance au solide S dans son mouvement par rapport à T_1, déterminer une troisième équation de mouvement.