École Nationale
Des Sciences
Appliquées de Kénitra
(ENSAK)

Année universitaire 2013 – 2014

Devoir Surveillé

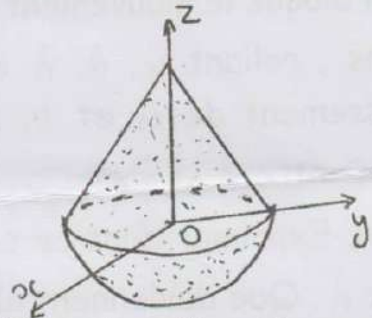
DE LA MECANIQUE DU SOLIDE

Durée : 2 Heures

Exercice1

Un solide homogène plein $S = S_1 \cup S_2$ répartie uniformément en masse, , est formé deux élèments : (voir figure ci-après)

- Un cône de révolution S_1 de hauteur h , de masse m et de rayon du grand cercle de base R.
- Une demi boule S_2 de centre O , de masse m et de rayon R extérieur au cône.



1) Déterminer la position du centre d'inertie G_1 du cône S_1.
2) Déterminer la position du centre d'inertie G_2 du ~~cône~~ demi boule S_2.
3) Déterminer la position du centre d'inertie G du cône $S = S_1 \cup S_2$.
4) Montrer que la matrice d'inertie du solide S au point O dans la base du repère $R(O.x.y,z)$ est diagonale.

   On désigne par cette matrice $I(O,S) = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}$

   Il s'agit de calculer explicitement A et C
5) Exprimer dans cette même base la matrice d'inertie au point G du solide S.
6) Déterminer le moment d'inertie du solide S par rapport à la droite passant par O et d'équation z=y et x=0.

Exercice 2

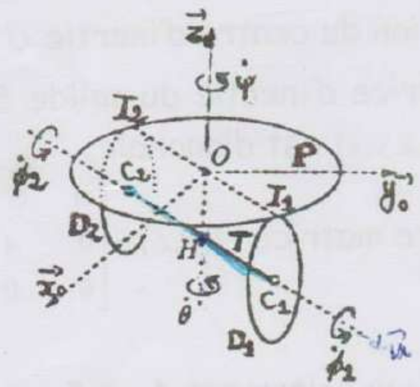
Un plateau circulaire (P) , est mis en rotation autour de son axe, grâce à un système constitué d'une tige (T), de longueur 2l , aux extrémités de laquelle sont articulés deux disques identiques D_1 et D_2 de rayon r. La tige est perpendiculaire à l'axe de rotation et son centre est situé sur cet axe sous le plateau , à la distance r de (P) (voir figure ci-dessous). Le plateau , la tige et les deux disques sont des solides homogènes. On note $\dot{\psi}$ et $\dot{\theta}$ les vitesses de rotations du plateau (P) et de la tige (T) respectivement par rapport au référentiel du laboratoire $R_0(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ et on désigne par $\dot{\phi}_1$ et $\dot{\phi}_2$ les vitesses de rotations de D_1 et D_2 par rapport à la tige (T).

1) Quelles sont les expressions des vecteurs vitesses de rotations $\vec{\Omega}_{D_1/R_0}$ et $\vec{\Omega}_{D_2/R_0}$ des deux disques D_1 et D_2 par rapport à $R_0(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$?

   Que se passe-t-il si on bloque le mouvement de la tige (T) ?

2) Ecrire les équations , reliant $\dot{\psi}$, $\dot{\theta}$, $\dot{\phi}_1$ et $\dot{\phi}_2$ qui traduisent le roulement sans glissement de D_1 et D_2 sur le plateau (P) ? En déduire une relation entre $\dot{\phi}_1$ et $\dot{\phi}_2$.

3) On bloque le plateau. Exprimer dans ce cas de $\dot{\theta}$ en fonction de $\dot{\phi}_1$ ou en fonction de $\dot{\phi}_2$. Que deviennent alors $\vec{\Omega}_{D_1/R_0}$ et $\vec{\Omega}_{D_2/R_0}$?



جامعة ابن طفيل Université Ibn Tofaïl	**_ENSAK_** *Ecole Nationale* *des Sciences Appliquées* *Kenitra* *Professeur M.BENBRAHIM*

Examen de la mécanique du solide

(Durée : 2 heures) ; Le 10/01/2014

On considère un train d'attérrissage télescopique et escamotage latéralement qui peut être modélisé de la manière suivante (Figure).

On désigne par $R_1(O, x_1, y_1, z_1)$ un référentiel lié à l'avion , Oz_1 étant la verticale ascendante, Ox1 étant dirigé parallèlement à l'axe longitudinal de l'avion. Soit $\vec{g} = -g\vec{z_1}$ l'intensité du champ de pesanteur.

Ce train d'attérrissage est constitué:

- de deux barres S_1 et S_2 , (OA et CB) , emboitées, chacune de masse m, de longueur 2l, de centre de masse G_1 et G_2 ,coulissant l'une dans l'autre selon l'axe $\vec{w}$ du référentiel $R_2(C, \vec{u}, \vec{w}, \vec{z_s})$.

On pose $\quad \vec{CO} = \lambda\, \vec{w}$; $\vec{u} = \vec{x_1}$, $\theta = \widehat{(\vec{z_1}, \vec{z_s})}$

Dans un référentiel de directions identiques à celles de R_2 centré au milieu des barres, le tenseur d'inertie de chaque barre s'écrit:

$$I_B = \begin{pmatrix} \frac{ml^2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{ml^2}{3} \end{pmatrix}$$ (valable G1 et G2)

- de deux roues solidaires de leur axe, formant un solide de révolution S_3 d'axe Cz_s, de centre d'inertie C , de masse M , de tenseur d'inertie dans R_2

$$I = \begin{pmatrix} A' & 0 & 0 \\ 0 & A' & 0 \\ 0 & 0 & C' \end{pmatrix}$$

Soit $\dot{\varphi}\, \vec{z_s}$ la rotation de S_3 par rapport à R_2 (rotation propre des roues)

Soit:: $[\vec{R_0}, \vec{m_0}]$ Le torseur des forces des liaisons en O de l'avion sur S_1 .On désigne par C_0 : $\quad C_0 = \vec{m_0}.\vec{x_1} = \vec{m_0}.\vec{u}$

$[\vec{R_A}, \vec{m_A}]$ Le torseur des forces de liaison en A de S_1 sur S_2 On désigne par T_A : $\quad T_A = \vec{R_A}.\vec{w}$

$[\vec{R_C}, \vec{m_C}]$ Le torseur des forces de liaison en C de S_2 sur S_3. Cette liaison est une liaison rotoïde parfaite d'axe $\vec{z_s}$ $(\vec{m_C}.\vec{z_s} = 0)$

Etude de la phase du relevage du train

A partir de l'instant de décollage, on suppose que l'avion est animé d'une vitesse constante et que le référentiel R_1 peut être considéré comme galiléen. On escamotte le train en faisant varier linéairement $\lambda(t)$ de 3l à 2l, $\theta(t)$ de $\pi/2$ à 0.

On pose $\dot{\lambda} = \alpha = cte$; $\dot{\theta} = \beta = cte$

à l'instant initial de ce mouvement, t = 0 ; $\dot{\varphi}(0) = \dot{\varphi}_0$

(pour obtenir ce mouvement, on doit maîtriser le couple C_0 obtenu à l'aide d'un moteur, et la force T_A obtenue par un verin de masse négligée situé entre S_1 et S_2)

On se propose de déterminer C_0, T_A, $\varphi(t)$

Pour la résolution de ce problème, il est demandé d'exprimer les grandeurs vectorielles dans R_2.

1- Déteminer les rotations: $\vec{\Omega}_{S_1/R_1}$, $\vec{\Omega}_{S_2/R_1}$, $\vec{\Omega}_{S_3/R_1}$

2- Déterminer en G_2 le torseur cinématique de S_2/R_1, en C le torseur cinématique de S_3/R_1.

3- Calculer successivement :

- les moments cinétique de S_1/R_1, S_2/R_1, et de S_3/R_1 en O.
- Les moments dynamiques de Σ/R_1 en O ($\Sigma = S_1 + S_2 + S_3$) et de S_3/R_1 en C

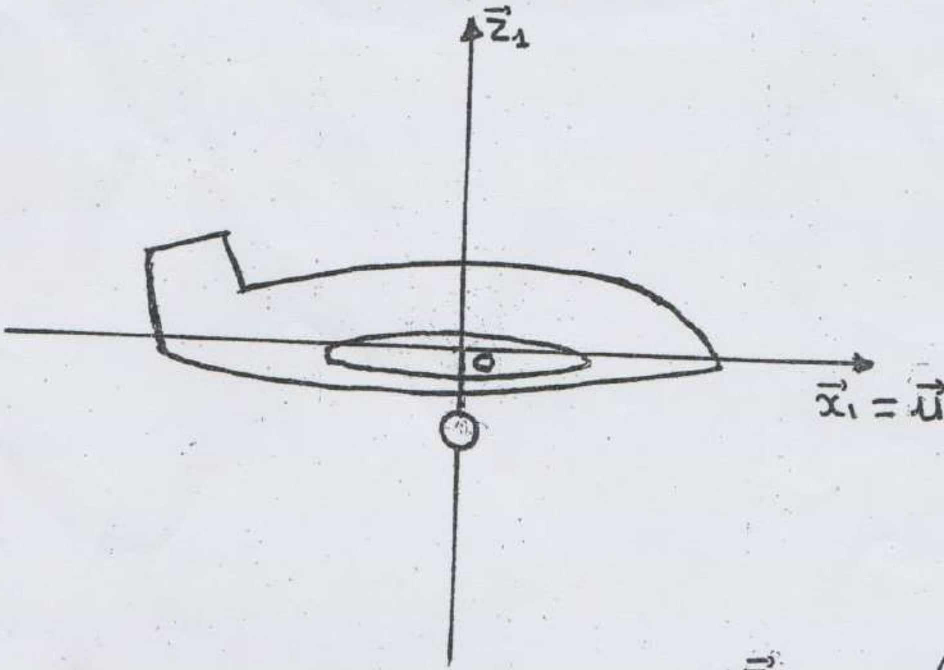
4- Ecrire vectoriellement l'ensemble des équations par les théorèmes généraux, pour S3(moment en C), pour $\Sigma_2 = S_2 + S_3$ (moment en A) et pour Σ (moment en O)

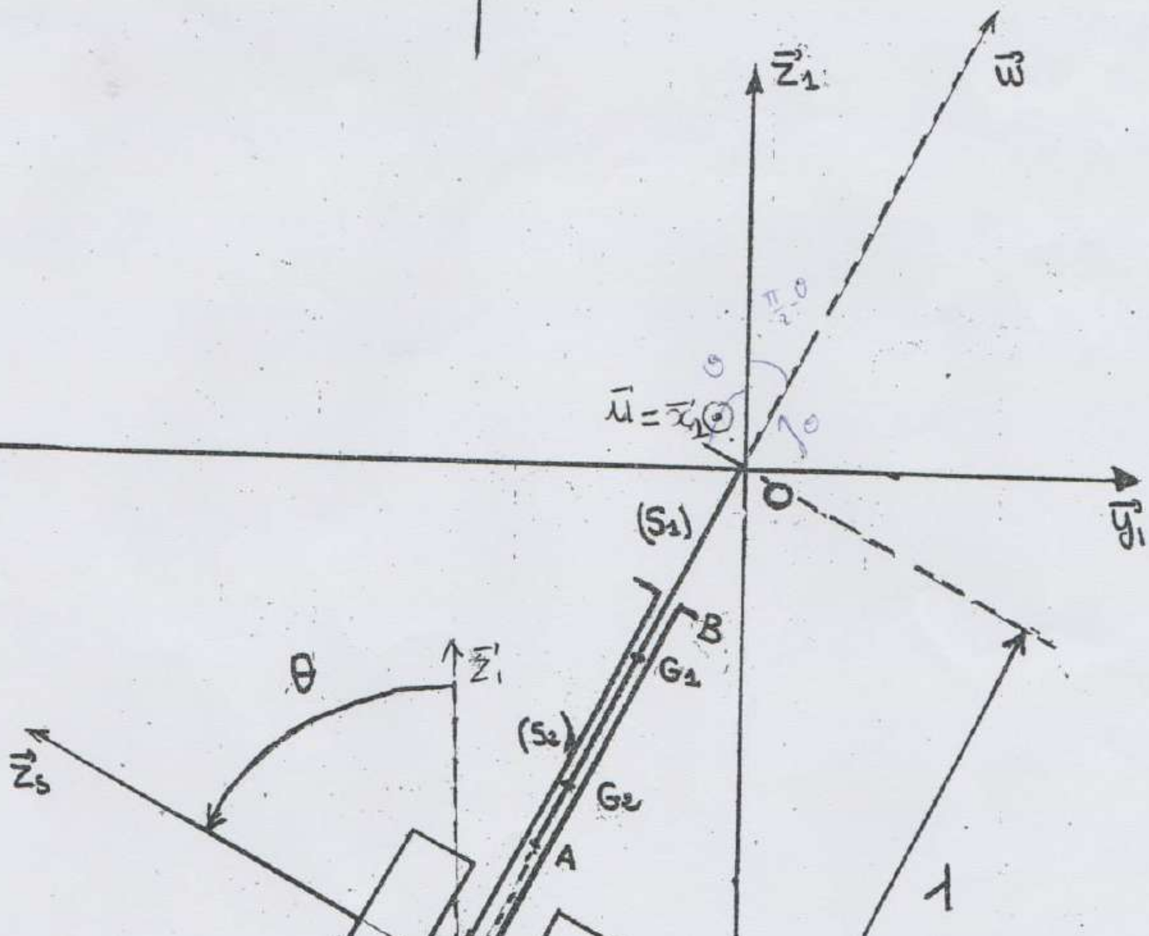
5- Montrer que par des projections adéquates de certaines équations précedentes sur $\vec{u}$, $\vec{w}$ ou $\vec{z}_s$, on peut, d'une part déterminer une équation indépendante de mouvement (pour $\dot{\varphi}$), et d'autre part déterminer directement C_0 et T_A.

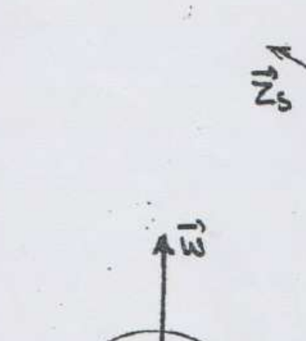
6- Expliciter les équations précedentes. Montrer que l'équation en $\dot{\varphi}$ permet d'écrire une intégrale première. Déterminer T_A et C_0 en fonction des données du problème.

7- En utilisant la condition d'une liaison rotoïde parfaite en C d'axe $\vec{z}_s$, montrer que le couple $\vec{m}_C \cdot \vec{w}$ qui agit sur S_3 est constant. Donner son expression

8) Sachant que ce couple qui agit sur S_3 tend à faire basculer l'avion, comment doit-on procéder pratiquement pour l'annuler ?


$\vec{z}_1$
O
$\vec{x}_1 = \vec{u}$


$\vec{z}_1$
$\vec{w}$
$\vec{u} = \vec{x}_1$
O
$\vec{y}_1$
(S_1)
B
G_1
(S_2)
G_2
A
C
(S_3)
θ
$\vec{z}_1$
$\vec{z}_5$
λ


$\vec{w}$
$\vec{u}$
C
φ