École Nationale Des Sciences Appliquées (ENSA)	*Année universitaire 2012 – 2013* *Contrôle continu en Mécanique des solides*

Exercice I

Dans le repère $R_0(O;\vec{X}_0;\vec{Y}_0;\vec{Z}_0)$, on considère le point $\boldsymbol{O}$, le point $\boldsymbol{A}$ de coordonnées (1, 0, 0) et le point $\boldsymbol{B}$ de coordonnées (1, 1, 0). On connait certaines composantes des valeurs en $\boldsymbol{O}$, $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ d'un champ antisymétrique de moment $\vec{M}(P)$ à savoir :

$$\vec{M}(O)=\begin{vmatrix}\alpha\\ \alpha\\ 1\end{vmatrix} \qquad \vec{M}(A)=\begin{vmatrix}x\\ 1-\alpha\\ 2\end{vmatrix} \qquad \vec{M}(B)=\begin{vmatrix}y\\ Z\\ -\alpha\end{vmatrix}$$

1. En utilisant l'equiprojectivité du champ, déterminer complètement $\vec{M}(A)$ et $\vec{M}(B)$ en cherchant les valeurs de x, y et z en fonction de α.

Dans ce qui suit, on prendra : $x=\alpha;\ y=3\alpha-1\ et\ z=1-\alpha$

2. Calculer la résultante de ce champ de moment.
3. Trouver l'axe central du champ.
4. Le système de vecteur qui engendre ce champ peut-il être équivalent à un couple ?

Exercice II

Soient trois points A, B et C dont les coordonnées, dans le repère $R_0(O;\vec{X}_0;\vec{Y}_0;\vec{Z}_0)$, sont données par $A(ap,aq,0)$, $B(-aq,ap,0)$ et $C(0,0,a)$ où a, p et q sont des scalaires connus tels que : $a>0, p=0\ et\ p^2+q^2=1$.

On considère le torseur $T[\vec{R},\vec{M}(P)]$ tel que les projections du moment an A, $\vec{M}(A)$ soient connues seulement sur $\overrightarrow{OY_0}$ et $\overrightarrow{OZ_0}$; celles du moment en B, $\vec{M}(B)$, connues seulement sur $\overrightarrow{OX_0}$ et $\overrightarrow{OZ_0}$; celles du moment en C, $\vec{M}(C)$, connues seulement sur $\overrightarrow{OX_0}$ et $\overrightarrow{OY_0}$.

$$\vec{M}(A).\overrightarrow{OY_0}=apq \qquad \vec{M}(A).\overrightarrow{OZ_0}=0$$

$$\vec{M}(B).\overrightarrow{OX_0} = apq \qquad \vec{M}(B).\overrightarrow{OZ_0} = a$$

$$\vec{M}(C).\overrightarrow{OX_0} = aq(p+1) \qquad \vec{M}(C).\overrightarrow{OY_0} = ap(q-1)$$

1. Déterminer la résultante $\vec{R}$ de T.

2. Compléter la détermination des moments $\vec{M}(A)$, $\vec{M}(B)$ et $\vec{M}(C)$.

3. Calculer le moment de T par rapport à l'axe $(A, \overrightarrow{AB})$.

4. Calculer le moment en P(x, y, z) de T, soit $\vec{M}(P)$, et déterminer son axe central (Δ).

Exercice III

Le repère $R(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est orthonormé et orienté dans le sens habituel. a, b et c sont des paramètres réels. On donne les trois vecteurs liés suivants :

G_1	$\vec{R}_1 = a\vec{i} + b\vec{j}$	*d'origine* $A(1,0,0)$
G_2	$\vec{R}_2 = \vec{j}$	*d'origine* $B(1,1,0)$
G_3	$\vec{R}_3 = c\vec{i}$	*d'origine* $C(0,0,1)$

et on leur associe respectivement les glisseurs G_1, G_2 *et* G_3.

1. Montrer que $G_1 + G_2$ est un glisseur, préciser son axe.

2. On note $T = \left[\vec{R}, \vec{U}(P)\right]$ le torseur $T = G_1 + G_2 + G_3$

a. Déterminer $\vec{U}(P)$ où P est un point de coordonnés (x, y, z)

b. Préciser le cas où T est un couple non réduit au torseur nul.

c. lorsque T n'est ni un couple, ni le torseur nul, écrire les deux équations définissant son axe central.

Université Ibn Tofail

École Nationale
Des Sciences
Appliquées
(ENSA)

Année universitaire 2012 – 2013

EXAMEN DE MECANIQUE DU SOLIDE

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice I

Considérons un solide S constitué par une boule homogène et pleine, de centre G, de masse M, et de rayon a, à laquelle est soudée suivant un diamètre une tige OG de section et de masse négligeables, de longueur 2a.

Le solide S est posé sur le plan $\pi(O,\vec{x}_1,\vec{y}_1)$ du repère $R_0(O,\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1)$ orthonormé direct supposé galiléen (z_1 étant la verticale ascendante). La boule est en contact avec le plan matérialisé π au point I. Le solide S est en articulation sphérique de centre O, articulation supposé sans frottement. Soit $R_s(O,\vec{x}_s,\vec{y}_s,\vec{z}_s)$ le repère lié au solide S. On repère G par $\overrightarrow{OG} = 2a\,\vec{z}_s$.

1. Montrer que les liaisons en O et en I sont telles que :

$$\overrightarrow{OI} = -\sqrt{3}\,a\,\vec{v} \qquad et \qquad \theta = (\vec{z}_1,\vec{z}_s) = constante$$

$\vec{v}$ vecteur unitaire porté par IO.

2. a- Définir les angles d'Euler ψ et φ qui permettent de repérer le solide S. On propose d'utiliser les repères orthonormés directs suivants :

$R_0(O,\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1)$, $R_1(O,\vec{u},\vec{v},\vec{z}_1)$, $R_2(O,\vec{u},\vec{w},\vec{z}_s)$ et $R_s(O,\vec{x}_s,\vec{y}_s,\vec{z}_s)$.

b- En déduire le vecteur rotation instantané $\vec{\Omega}(S/R_0)$ du solide par rapport au repère R_0.

3. Cinématique et cinétique :

a- Calculer par leur composante dans la base $(\vec{u},\vec{v},\vec{z}_1)$ T_c

i) la vitesse $\vec{V}(G\in S/R_0)$

ii) le torseur cinématique au point G de S dans son mouvement par rapport à R_0.

b- utiliser un des théorèmes de Koenig pour calculer la matrice d'inertie au point O de S exprimée dans la base $(\vec{u},\vec{w},\vec{z}_s)$ on donne l'expression de la matrice d'inertie I(G,S) au point G de S exprimée dans la base $(\vec{x}_s,\vec{y}_s,\vec{z}_s)$

$$I(G,S) = \begin{pmatrix} \frac{2}{5}Ma^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5}Ma^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{5}Ma^2 \end{pmatrix}$$

c- Calculer par leur composante dans la base $(\vec{u},\vec{w},\vec{z}_s)$, le torseur cinétique de S :

i) au point G dans son mouvement par rapport à R_0.

ii) au point O dans son mouvement par rapport à R_0.

d- Calculer l'énergie cinétique du système S dans son mouvement par rapport à R_0.

4. Dynamique :

Les actions extérieures exercées sur S sont :

- Le champ de pesanteur uniforme et constant d'accélération $\vec{g} = -g\,\vec{z}_1$.
- La réaction du plan π sur S définie par un glisseur dont le support passe par I et de vecteur $\vec{R}_1 = R_1\,\vec{z}_1$ (pas de frottement).
- L'action du plan π sur le solide en O est représentée par le vecteur $\vec{R}$.

a- Donner les éléments de réduction au point O du torseur des forces extérieures appliquées au solide S dans son mouvement par rapport à R_0.

b- Enoncer le principe fondamentale de la dynamique sous forme vectorielle par rapport au repère galiléen R_0, l'appliquer au solide S au point O.

c- En appliquant le théorème du moment cinétique au point O, montrer que $\vec{L}(O,S/R_0)\cdot\vec{z}_1 = cte = K_1$ et $\vec{L}(O,S/R_0)\cdot\vec{z}_s = cte = K_2$

d- En déduire de la question précédente les deux équations de mouvement.

Exercice II

On considère un solide de révolution (S) autour de l'axe $(O,\vec{Z})$. Ce solide est maintenu en O par une liaison Rotule parfaite.

Les repères utilisés sont :

- $R_0(O,\vec{X}_0,\vec{Y}_0,\vec{Z}_0)$ lié à l'observateur,
- $R_1(O,\vec{u},\vec{v},\vec{Z}_0)$
- $R_2(O,\vec{u},\vec{w},\vec{Z})$
- $R_s(O,\vec{X},\vec{Y},\vec{Z})$ lié au solide.

Le centre d'Inertie G est tel que $\overrightarrow{OG} = z_G\,\vec{Z}$. Les rotations sont paramétrées par les angles d'Euler habituels ψ,θ et φ.

1. En utilisant les paramètres de rotations, exprimer le vecteur rotation du solide S dans son mouvement par rapport à R_0.
2. Dans ce qui suit, on prendra $\overrightarrow{OG} = z_G\,\vec{Z}$

   Déterminer l'expression de $\vec{V}(G/R_0)$ vitesse du centre de masse G du solide S, exprimé dans la base $(\vec{u},\vec{v},\vec{Z}_0)$.
3. Justifier que la base $(\vec{u},\vec{w},\vec{Z})$ est une base principale d'Inertie du solide S.
4. On considère que l'operateur d'inertie du solide S dans la base $(\vec{u},\vec{w},\vec{Z})$ est de la forme :

$$J(O,S/R_0) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{(\vec{u},\vec{w},\vec{Z})}$$

   i) Quelle relation existe entre les moments d'inertie A et B et pourquoi ? On ne demande pas de calculer les expressions des moments d'inertie.

   ii) Déterminer l'expression du moment cinétique $\vec{\sigma}(O,S/R_0)$ dans la base $(\vec{u},\vec{w},\vec{Z})$.
5. Exprimer dans la base $(\vec{u},\vec{v},\vec{Z}_0)$, le vecteur accélération du centre de masse G dans son mouvement par rapport à R_0.

6. En utilisant le règle de dérivation composée et en prenant l'expression de $\vec{\Omega}(R_2 / R_0)$ dans la base $(\vec{u}, \vec{w}, \vec{Z})$: $\vec{\Omega}(R_2 / R_0) = \dot{\theta}\,\vec{u} + \dot{\psi}\sin\theta\,\vec{w} + \dot{\psi}\cos\theta\,\vec{Z}$, calculer le moment dynamique en O de S par rapport à R_0.
7. En plus de la force du poids : $\vec{P} = -mg\,\vec{Z}_0$, on suppose que le solide est soumis à une force de réaction qui s'écrit, dans la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{Z}_0)$, comme:

$$\vec{R} = R_u\,\vec{u} + R_v\,\vec{v} + R_z\,\vec{Z}_0$$

   i) Donner l'expression du vecteur résultant total du torseur force.
   ii) Déterminer l'expression de la résultante des moments des forces appliquées à S calculer au point O.
8. Donner l'expression de l'énergie cinétique de S dans son mouvement par rapport à R_0.

ψ et θ propre