Université Ibn Tofail

École Nationale
Des Sciences
Appliquées
(ENSA)

Année universitaire 2011 – 2012

EXAMEN DE MECANIQUE DU SOLIDE
(Session de janvier2012)

On considère un solide de revolution (S) autour de l'axe $(O,\vec{Z})$. Ce solide est maintenu en O par une liaison Rotule parfaite.

Les repères utilisés sont :

- $R_0(O,\vec{X}_0,\vec{Y}_0,\vec{Z}_0)$ lié à l'observateur,
- $R_1(O,\vec{u},\vec{v},\vec{Z}_0)$
- $R_2(O,\vec{u},\vec{w},\vec{Z})$
- $R_s(O,\vec{X},\vec{Y},\vec{Z})$ lié au solide.

Le centre d'Inertie G est tel que $\overrightarrow{OG}=z_G\,\vec{Z}$. Les rotations sont paramétrées par les angles d'Euler habituels ψ,θ et φ.

1. En utilisant les paramètres de rotations, exprimer le vecteur rotation du solide S dans son mouvement par rapport à R_0.
2. Déterminer la position du centre de masse G sur l'axe $(O,\vec{Z})$.
3. Dans ce qui suit, on prendra $\overrightarrow{OG}=z_G\,\vec{Z}$

   Déterminer l'expression de $\vec{V}(G/R_0)$ vitesse du centre de masse G du solide S, exprimé dans la base $(\vec{u},\vec{v},\vec{Z}_0)$.
4. Justifier que la base $(\vec{u},\vec{w},\vec{Z})$ est une base principale d'Inertie du solide S. trouver dans cette même base l'expression de l'operateur d'Inertie de S.
5. On considère que l'operateur d'inertie du solide S dans la base $(\vec{u},\vec{w},\vec{Z})$ est de la forme :

$$\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{(\vec{u},\vec{v},\vec{Z})} \quad (u, w, z)$$

   i) Quelle relation existe entre les moments d'inertie A et B et pourquoi ?

   ii) Déterminer l'expression du moment cinétique $\vec{\sigma}(O,S/R_0)$ dans la base $(\vec{u},\vec{w},\vec{Z})$.
6. Exprimer dans la base $(\vec{u},\vec{v},\vec{Z}_0)$, le vecteur accélération du centre de masse G dans son mouvement par rapport à R_0.
7. En utilisant le règle de dérivation composée et en prenant l'expression de $\vec{\Omega}(R_2/R_0)$ dans la base $(\vec{u},\vec{w},\vec{Z})$: $\vec{\Omega}(R_2/R_0)=\dot{\theta}\,\vec{u}+\dot{\psi}\sin\theta\,\vec{w}+\dot{\psi}\cos\theta\,\vec{Z}$, calculer le moment dynamique en O de S par rapport à R_0.

8. Déduire que la composante suivant $\vec{Z}$ du moment dynamique peut s'écrire comme :

$$\vec{D}(O,S/R_0)\bullet\vec{Z} = C\frac{d}{dt}(\Omega_Z)$$

Où Ω_Z est la composante du vecteur rotation instantané de S par rapport à R_0 exprimé dans la base $(\vec{u},\vec{w},\vec{Z})$.

9. En plus de la force du poids : $\vec{P} = -mg\vec{Z}_0$, on suppose que le solide est soumis à une force de réaction qui s'écrit, dans la base $(\vec{u},\vec{v},\vec{Z}_0)$, comme:

$$\vec{R} = R_u\,\vec{u} + R_v\,\vec{v} + R_z\,Z_0$$

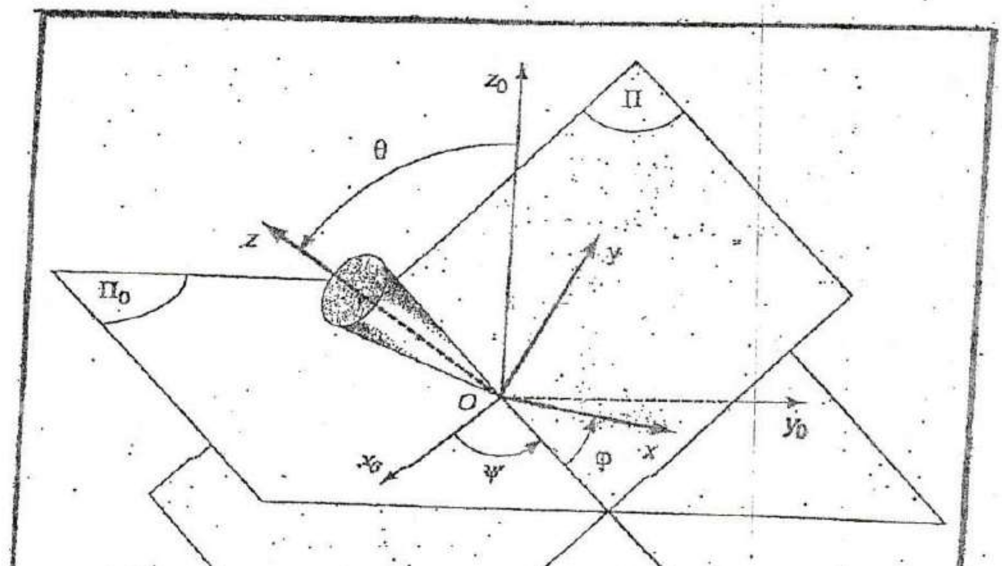
i) Donner l'expression du vecteur résultant total du torsseur force.
ii) Déterminer l'expression de la résultante des moments des forces appliquées à S calculer au point O.

10. En appliquant le théorème de la quantité de mouvement et le théorème du moment cinétique au point O, trouver les six équations décrivant le mouvement du système.

11. Déduire que la composante de $\vec{\Omega}(S/R_0)$ suivant $\vec{Z}$ se conserve.

12. Donner l'expression de l'énergie cinétique de S dans son mouvement par rapport à R_0.

cône plein



Bonne chance.