École Nationale Des Sciences Appliquées (ENSA)	*Année universitaire 2010 – 2011* *CONTROLE DE MECANIQUE DU SOLIDE*

Exercice I : (Cinématique du solide)

Un disque homogène S, de masse m, de rayon R et de centre de masse G, roule sans glissement sur le plan horizontal $X_1O_1Y_1$ d'un référentiel T_1 supposé galiléen. I désigne le point de contact du solide S avec le plan $X_1O_1Y_1$. On désigne par T(G,X,Y,Z) un référentiel lié au solide tel que l'axe Z soit perpendiculaire au plan du disque et les axes X et Y soient dans le plan de celui-ci. L'orientation du solide dans l'espace est définie par les angles d'Euler ψ, θ et φ. Tous les résultats doivent être exprimés dans la base $R(\vec{u}, \vec{w}, \vec{z})$. $T_1(X_1, Y_1, Z_1)$

1. Déterminer le vecteur rotation $\vec{\Omega}(S/T_1)$, exprimé dans la base $R(\vec{u}, \vec{w}, \vec{z})$.
2. Trouver l'équation décrivant le mouvement sans pivotement. Quelle est la nature de cette équation ? Même question pour le cas du mouvement sans roulement.
3. Ecrire la relation vectorielle exprimant la condition de roulement sans glissement du solide.
4. En déduire l'expression de $\vec{V}(G \in S/T_1)$, exprimée dans $R(\vec{u}, \vec{w}, \vec{z})$.
5. Calculer la vitesse du point géométrique de contact $\vec{V}(I/T_1)$, exprimée dans $R(\vec{u}, \vec{w}, \vec{z})$

Exercice II : (Matrice D'Inertie d'un solide)

1. Déterminer le centre de masse d'une demi-sphère homogène, de masse m, de rayon R et de centre C.
2. Déterminer le centre de masse d'un cône plein homogène, de masse M, de hauteur h et de base circulaire de rayon R.
3. En déduire le centre de masse du solide formé par le cône de la deuxième question surmonté de la demi-sphère de la première question.

Question Bonus : (Opérateur d'Inertie)

Définir l'opérateur d'Inertie et montrer qu'il est symétrique.

Bonne chance

Année universitaire 2010 – 2011

École Nationale
Des Sciences
Appliquées
(ENSA)

EXAMEN DE MECANIQUE DU SOLIDE

(Session de Janvier 20011)

On considère un solide ***(S)*** de révolution autour d'un axe $(O,\vec{k})$, homogène, pesant, de masse $\boldsymbol{m}$. Soit $\boldsymbol{G}$ son centre de masse et $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ un repère orthonormé lié à ***(S)***. On désigne par $\boldsymbol{A=B}$ et $\boldsymbol{C}$ les valeurs propres de l'opérateur d'inertie de ***(S)*** relatif à $\boldsymbol{O}$ correspondant aux vecteurs propres $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ (ce sont les éléments du tenseur principal d'inertie). Le point $\boldsymbol{O}$ étant fixe, le solide ***(S)*** est mobile autour de $\boldsymbol{O}$ et peut tourner autour de l'axe $(O,\vec{k})$.

Soit $(O,\vec{i}_0,\vec{j}_0,\vec{k}_0)$ un repère orthonormé fixe tel que l'axe $(O,\vec{k}_0)$ soit dirigé suivant la verticale ascendante et que :

$$\vec{u}=\frac{\vec{k}_0\wedge\vec{k}}{\left|\vec{k}_0\wedge\vec{k}\right|};\qquad \vec{v}=\vec{k}_0\wedge\vec{u};\qquad \vec{w}=\vec{k}\wedge\vec{u}$$

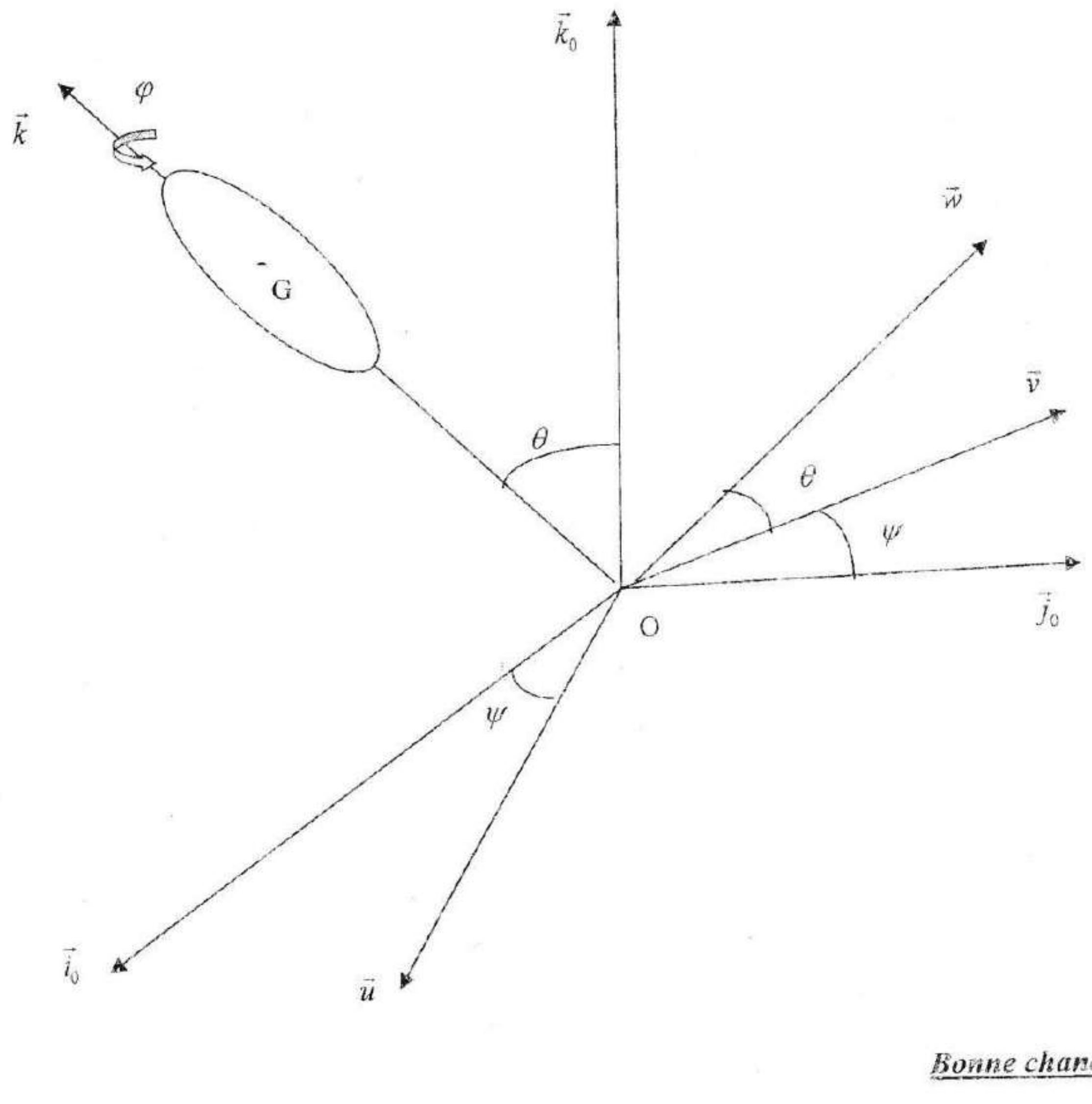
$$\psi=(\vec{i}_0,\vec{u});\qquad \theta=(\vec{k}_0,\vec{k});\qquad \varphi=(\vec{u},\vec{i})$$

où ψ,θ,φ sont les angles d'Euler habituels.

1. Calculer le vecteur de rotation instantané $\vec{\Omega}(S/R_0)$ du mouvement de (S). ***On l'exprimera dans la base*** $(\vec{u},\vec{w},\vec{k})$.
2. Calculer le moment cinétique $\vec{\sigma}(O,S/R_0)$ relatif à $\boldsymbol{O}$ de ***(S)***. On l'exprimera dans la base $(\vec{u},\vec{w},\vec{k})$; pour cela, monter sans faire de calcul que le tenseur principal d'inertie est le même dans les bases $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ et $(\vec{u},\vec{w},\vec{k})$.
3. En déduire de la question précédente l'expression de $\left.\dfrac{d\vec{\sigma}}{dt}\right|_{R_0}$ **(par rapport à au repère fixe** $(O,\vec{i}_0,\vec{j}_0,\vec{k}_0)$ **mais exprimé dans la base** $(\vec{u},\vec{w},\vec{k})$**)**
4. Le solide ***(S)*** étant soumis à son poids $\vec{P}=-mg\vec{k}_0$ et à la réaction $\vec{R}$ au point $\boldsymbol{O}$.
   Calculer le moment $\vec{M}_0$ par rapport à $\boldsymbol{O}$ des forces agissant sur ***(S)***. On posera $a=\left|\vec{OG}\right|$.
5. Appliquer le théorème du moment cinétique au point $\boldsymbol{O}$ en projection sur $\vec{u},\vec{w}$ et $\vec{k}$.
6. Calculer la vitesse et l'accélération de $\boldsymbol{G}$. **Donner leur expression dans la base** $(\vec{u},\vec{v},\vec{k}_0)$.
7. Appliquer le théorème de la résultante cinétique en projection sur $\vec{u},\vec{v}$ et $\vec{k}_0$, on posera $\vec{R}=X\vec{u}+Y\vec{v}+Z\vec{k}_0$.

8. On suppose que le mouvement en θ est stationnaire $\theta(t) = \theta_0 = cte$. Déduire des équations obtenues en **5)** que $\dot{\psi}$ et $\dot{\varphi}$ demeurent aussi constants au cours du temps, moyennant une relation que l'on déterminera, liant les valeurs initiales $\theta_0 \neq n\pi, \dot{\psi}_0, \dot{\varphi}_0$.
9. En déduire les valeurs de ψ, φ, X, Y, Z à l'instant t en supposant qu'à l'instant $t = 0$, on : $\psi = \varphi = 0$.

Les questions 6) et 7) peuvent être traitées indépendamment des questions précédentes.



__Bonne chance__