École Nationale des Sciences Appliquées
Classes Préparatoires intégrées
Semestre 3
A-U : 2020/2021

Travaux dirigés de MÉCANIQUE DU SOLIDE

Série 4

Exercice 1 :

Un système matériel $(\sum)$ est constitué d'une tige O_1O_2 de longueur $2L$ et de deux disques identiques D_1 et D_2 de rayon a et de centre O_1 et O_2. Soit $R_0(O, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ le repère de référence et $R_1(I, \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z})$ un repère lié à la tige O_1O_2 d'origine I, milieu de O_1O_2.

L'axe $(\overrightarrow{Iy})$ est porté par O_1O_2 et l'axe $(\overrightarrow{z})$ est parallèle à $(\overrightarrow{z_0})$ (vertical). $\dot{\varphi}_1$ et $\dot{\varphi}_2$ sont les vitesses de rotation des disques D_1 et D_2 autour de leur axe O_1O_2 et $\dot{\theta}$ la vitesse de rotation de O_1O_2 autour de $(\overrightarrow{Iz})$. Les points de contacts des disques avec le plan horizontal sont notés A_1 et A_2.

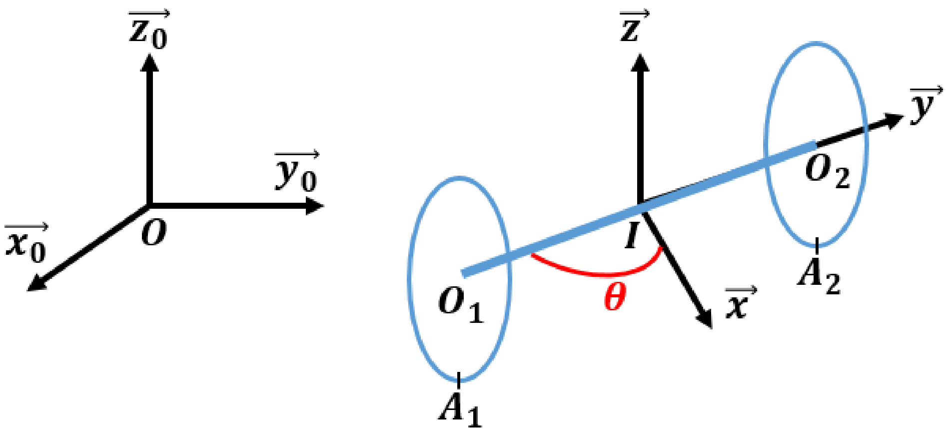
1. Définir vectoriellement les vecteurs rotation instantanée $\overrightarrow{\Omega_1}$ et $\overrightarrow{\Omega_2}$ des disques D_1 et D_2 par rapport à R_0.

2. Écrire la relation vectorielle reliant les vitesses $\overrightarrow{V}(O_1 \in R_1/R_0)$ et $\overrightarrow{V}(O_2 \in R_1/R_0)$.

3. Écrire la relation vectorielle reliant les vitesses $\overrightarrow{V}(A_1 \in D_1/R_0)$ et $\overrightarrow{V}(A_2 \in D_2/R_0)$.

4. Les contacts en A_1 et A_2 étant des roulements sans glissement (non-glissement des roues sur le sol), quelles relations doivent vérifier les quantités $\dot{\varphi}_1$, $\dot{\varphi}_2$ et $\dot{\theta}$.

5. Le mouvement des disques est obtenu à l'aide d'un différentiel qui impose $\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2 = 2\omega_0$. Calculer $\dot{\varphi}_1$ et $\dot{\varphi}_2$ en fonction de ω_0 et $\dot{\theta}$. Donner un exemple d'application de ce système et commenter.



Exercice 2 :

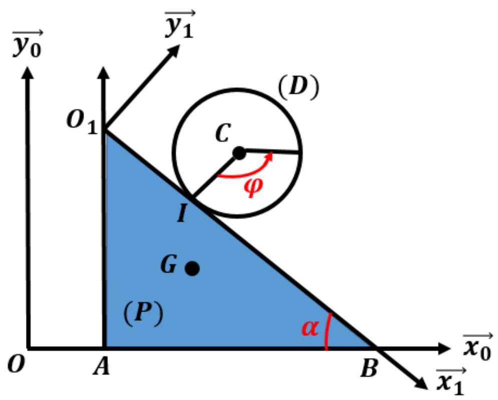
On considère le système (S) plan schématisé par la figure ci-dessous. Le repère $R_0(O, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ est galiléen. Le système matériel soumis au champ uniforme de la pesanteur $\overrightarrow{g}$, est constitué des deux solides suivants :

- Une plaque (P) pesante de masse M ayant la forme d'un triangle rectangle, dont l'un des côtés de l'angle droit est vertical et dont le côté horizontal AB glisse sans frottement sur un axe $(\overrightarrow{ox_0})$ lié au bati fixe (B). Ce triangle, qui a pour centre d'inertie C, reste situé au dessus de $(\overrightarrow{ox_0})$: l'hypothénus O_1B fait l'angle α avec l'horizontale $(\overrightarrow{ox_0})$. $R_1(O_1, \overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_1})$ le repère lié à la plaque.

- Un disque circulaire (C) homogène et pesant, de centre C, de rayon a et de masse m, assujetti à rouler sans glisser sur O_1B ; le point de contact est appelé I.

Les paramètres du système sont :

- X et Y les coordonnées de G dans R_0.
- x et y les coordonnées de C dans R_0.
- φ angle de rotation propre du disque.



1- Écrire les relations traduisant le roulement sans glissement au point I. En déduire le nombre de degrés de liberté du système (S).

2- Déterminer les torseurs cinétique et dynamique au point :
  a) C pour le disque dans son mouvement par rapport à R_0.
  b) G pour la plaque dans son mouvement par rapport à R_0.

3- Calculer en fonction de $\dot{X}$ et $\dot{\varphi}$, l'énergie cinétique du disque (D), de la plaque (P) et du (disque + plaque) $(D) + (P)$.

4- On suppose que les forces qui s'exercent sur le système se réduisent aux forces :
  $\alpha)$ extérieures : Réaction $\overrightarrow{R}$ du bati sur la plaque et les poids $\overrightarrow{M}_g$ et $\overrightarrow{m}_g$.
  $\beta)$ intérieures : se limitent à la seule réaction en I : $\overrightarrow{F}_{P/D} = -\overrightarrow{F}_{D/P} = R_T\overrightarrow{x}_1 + R_N\overrightarrow{y}_1$

  a) Par application des théorèmes généraux à (D) respectivement à (P), déterminer trois équations liant les paramètres $\ddot{X}$, $\ddot{\varphi}$, R_T et R_N.

  b) Par application du théorème de la dynamique à $(D) + (P)$, déterminer une intégrale première du mouvement. En déduire qu'elle s'écrit sous la forme $(M+m)\dot{X} - m\,a\,\dot{\varphi}\,cos(\alpha) = \;constante$

  c) Justifier l'existence d'un potentiel V pour le système $(D) + (P)$ et l'écrire en fonction de φ. En déduire une autre intégrale première régissant le mouvement de $(D) + (P)$.