École Nationale des Sciences Appliquées
Classes Préparatoires intégrées
Semestre 3
A-U : 2020/2021

Travaux dirigés de MÉCANIQUE DU SOLIDE

Série 2

Exercice 1 :

Une plaque en forme de Losange $ABCD$ se déplace par rapport à un repère orthonormé direct $R_0(O, \overrightarrow{X_0}, \overrightarrow{Y_0}, \overrightarrow{Z_0})$ de telle sorte que A reste confondu avec le point O et que le coté AB reste dans le plan (X_0OY_0).

1. Déterminer le nombre de degré de liberté de la plaque.
2. Quel est le vecteur rotation $\overrightarrow{\Omega}$ de la plaque par rapport à R_0.

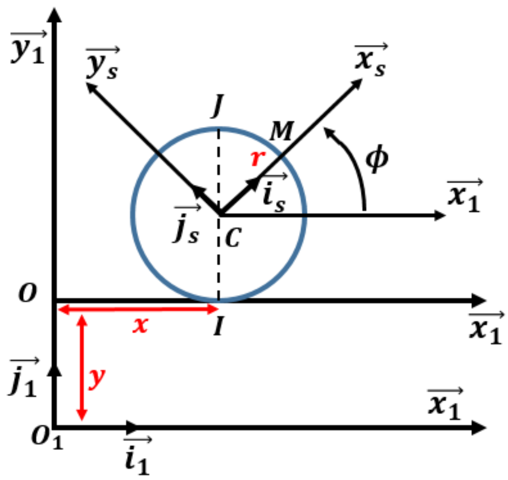
Exercice 2 :

1. Montrer que le champ de vitesse d'un solide indéformable est équiprojectif et en déduire le torseur cinématique.
2. Déterminer le vecteur rotation instantanée $\overrightarrow{\Omega}_{T_1/T_2}$ dans le cas d'un solide S en mouvement de rotation autour d'un point fixe.

Exercice 3 :

Un cerceau S de centre C de rayon r est en mouvement dans le plan (X_1OY_1) d'un référentiel $R_1(O, \overrightarrow{X_1}, \overrightarrow{Y_1}, \overrightarrow{Z_1})$ tout en restant en contact avec l'axe $\overrightarrow{OX_1}$ au point I, $\overrightarrow{OI} = x\overrightarrow{i_1}$; le repère $R_1(O, \overrightarrow{X_1}, \overrightarrow{Y_1}, \overrightarrow{Z_1})$ est en mouvement par rapport au référentiel fixe $T_1(O_1, \overrightarrow{X_1}, \overrightarrow{Y_1}, \overrightarrow{Z_1})$ tel que $\overrightarrow{O_1O} = y\overrightarrow{j_1}$.

Soit M un point du solide S. On pose $(\overrightarrow{i_1}, \overrightarrow{CM}) = \phi$. On lie au solide un repère $T_S(C, \overrightarrow{X_S}, \overrightarrow{Y_S}, \overrightarrow{Z_S})$ de base $(\overrightarrow{i_S}, \overrightarrow{j_S}, \overrightarrow{k_S})$ tel que l'axe $\overrightarrow{X_S}$ passe par le point M.



1. Déterminer le nombre de degrés de liberté du solide.
2. Exprimer le vecteur rotation instantanée du cerceau par rapport à T_1.
3. Peut-il y avoir pivotement du cerceau par rapport à R_1 ?
4. Déterminer la vitesse de glissement du cerceau par rapport à l'axe $\overrightarrow{OX_1}$.
5. Calculer $\overrightarrow{V}_{(I/R_1)}$ et $\overrightarrow{V}_{(I/S)}$ puis retrouver la vitesse de glissement du cerceau par rapport à l'axe $\overrightarrow{OX_1}$.
6. Calculer l'accélération $\overrightarrow{\gamma}_{(M/T_1)}$. En déduire les accélérations $\overrightarrow{\gamma}_{(I\in S/T_1)}$ et $\overrightarrow{\gamma}_{(J\in S/T_1)}$ où J est un point diamétralement opposé à I sur S.

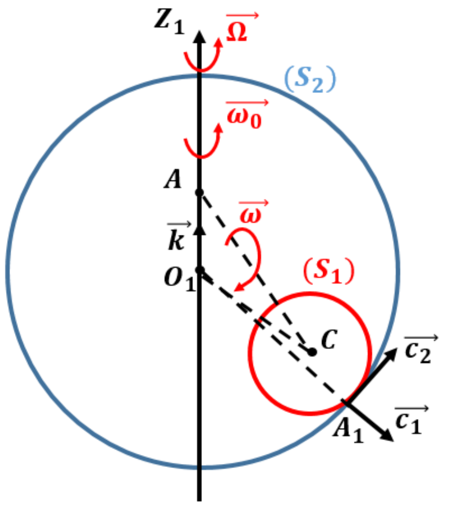
Exercice 4 :

On considère une sphère $S(G, a)$ homogène, de centre G de masse m et de rayon a, se mouvant sur le plan horizontal fixe (X_0OY_0) d'un repère fixe orthonormé direct $R_0(O, \overrightarrow{X_0}, \overrightarrow{Y_0}, \overrightarrow{Z_0})$. Soit $R_S(G, \overrightarrow{X_G}, \overrightarrow{Y_G}, \overrightarrow{Z_G})$ le repère orthonormé direct lié à la sphère. I est le point de contact entre la sphère S et le plan (X_0OY_0). On note ψ, θ et ϕ les trois rotations d'Euler de S/R_0 et x, y et z les coordonnées de G. On suppose que S roule sans glisser sur l'axe $(\overrightarrow{OX_0})$.

1. **Angles d'Euler :**
   a) Identifier les repères relatifs R_1 et R_2 d'Euler. En déduire les variables angulaires.
   b) Paramétrer la sphère S.
   c) Déterminer l'expression du vecteur rotation instantanée de S par rapport à R_0.
2. **Cinématique du point de contact**
   a) Traduire le non pivotement de S par rapport à R_0.
   b) Traduire le non roulement de S par rapport à $(\overrightarrow{OX_0})$. Montrer que l'une des équations obtenues est semi-holonome.
   c) Calculer les vitesses des différents points de contacts : Point de la sphère $I \in S$; point du plan matériel $I \in (X_0OY_0)$ et point géométrique $I^* \in E$.
   d) Donner la condition de non glissement de S par rapport à (X_0OY_0). Quel est le nombre de degrés de liberté de S dans son mouvement par rapport à R_0.

Exercice 5 :

Un disque horizontal S_2, de centre O_1 et de rayon R, est mis en rotation autour de l'axe O_1Z_1 du référentiel $T_1(O_1, \overrightarrow{X_1}, \overrightarrow{Y_1}, \overrightarrow{Z_1})$ supposé fixe, avec la vitesse angulaire Ω. Un disque S_1, de centre C et de rayon r, roule sans glisser sur le contour du disque S_2, avec la vitesse angulaire ω, autour de la tige AC qui est parallèle au plan de S_2. Cette tige tourne autour de l'axe $\overrightarrow{AZ_1}$ avec la vitesse angulaire ω_0 par rapport à S_2.



1. Écrire les expressions des vecteurs vitesses de rotation $\overrightarrow{\Omega}(S_1/AC)$, $\overrightarrow{\Omega}(AC/S_2)$ et $\overrightarrow{\Omega}(S_2/T_1)$.
2. En exploitant la condition de roulement sans glissement de S_1 sur S_2, déduire une relation entre les vitesses angulaires Ω, ω et ω_0.
3. Exprimer la vitesse du point J de S_1, qui est diamétralement opposé à I. Que devient cette vitesse si le disque S_2 est immobile ?