École Nationale des Sciences Appliquées
Classes Préparatoires intégrées
Semestre 3
A-U : 2020/2021

Travaux dirigés de MÉCANIQUE DU SOLIDE

Série 1 : TORSEURS

Exercice 1 :

Soit $(A, \overrightarrow{V})$ un vecteur lié défini dans la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ par :

$$A(-2,-1,2) \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{V} = \overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}$$

1. Calculer le moment du vecteur $\overrightarrow{V}$ au point de coordonnées $B(2,1,1)$.
2. Calculer le moment de $(A, \overrightarrow{V})$ par rapport à l'axe Δ passant par B et parallèle au vecteur $\overrightarrow{U} = 2\overrightarrow{i} - 3\overrightarrow{k}$.

Exercice 2 :

On se donne deux torseurs T_1 et T_2. Chercher l'ensemble des points (s'il existe) de l'espace en lesquels leurs **moments** soient **colinéaires**.

Exercice 3 :

Soient E l'espace vectoriel à trois dimensions et S une application linéaire de E dans E qui à tout vecteur $\overrightarrow{U}$ de E associe son image $\overrightarrow{U'} = S(\overrightarrow{U})$. Nous nous intéressons au cas où S est une application antisymétrique définie par : $S(\overrightarrow{U}) = L.\overrightarrow{U}$.

Trouver la matrice L associée à l'application antisymétrique S en prenant S_1, S_2 et S_3 comme composantes du vecteur $\overrightarrow{S}$.

Exercice 4 :

A tout point $P(x,y,z)$ de l'espace affine, on associe la famille de champs de vecteurs $\overrightarrow{V_t}(P)$ définie par :

$$\overrightarrow{V_t}(P) = \left(3y - tz + 1\ ,\ -3x + 2tz\ ,\ tx - t^2y - \frac{4}{3}\right) \qquad t \in IR$$

1. Montrer que les seuls champs équiprojectifs sont obtenus pour $t = 0$ et $t = 2$.
2. Déterminer pour chaque cas les torseurs associés par leurs éléments de réduction au point $O(0,0,0)$.

Exercice 5 :

On se donne deux glisseurs $(A, \overrightarrow{U})$ et $(B, \overrightarrow{V})$ tels que : $A(1,1,\alpha)$, $B(0,2,0)$, $\overrightarrow{U}(0,0,\alpha)$ et $\overrightarrow{V}(\beta,3,0)$ où α et β sont des réels. Soit le torseur $T = (A, \overrightarrow{U}) + (B, \overrightarrow{V})$.

1. Donner les éléments de réduction de T au point O.
2. Quelle est la condition nécessaire et suffisante pour que T soit un glisseur ?
3. Déterminer le support de T.

Exercice 6 :

Soit trois glisseurs $(A_i, \overrightarrow{V_i})_{i=1,2,3}$ tel que :

$A_1(0,0,a)$, $A_2(a,0,0)$ et $A_3(0,a,0)$; $\overrightarrow{V_1}(2a,0,0)$, $\overrightarrow{V_2}(0,3a,0)$ et $\overrightarrow{V_3}(0,0,4a)$.

On considère le torseur :

$$T = \sum_{i=1}^{3}(A_i, \overrightarrow{V_i})$$

Déterminer les éléments de réduction de T en un point P quelconque ainsi que son axe centrale.

Exercice 7 :

Considérons, dans un repère cartésien $R(O,X,Y,Z)$ de base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$, le système suivant de trois vecteurs liés définis par :

$$A_1(1,0,0) \quad ; \quad \overrightarrow{V_1} = a\,\overrightarrow{i} + b\,\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$$

$$A_2(0,1,0) \quad ; \quad \overrightarrow{V_2} = 2b\,\overrightarrow{i} - 2a\,\overrightarrow{j} - 3\,\overrightarrow{k}$$

$$A_3(0,0,1) \quad ; \quad \overrightarrow{V_3} = -8\,\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + c\,\overrightarrow{k}$$

Où a, b, et c sont des constantes réelles.

Pour quelles valeurs de a, b, et c le système des trois vecteurs liés est équivalent à un couple ? Déterminer alors son moment.

Exercice 8 :

On considère le champ de vecteurs $\overrightarrow{W}$ qui à tout point $M(x,y,z)$ associe le vecteur $\overrightarrow{W}(M)$ de composantes :

$$W_x = -1 - y - 2az$$

$$W_y = 3 + x - 2az$$

$$W_z = -2 + 2ax + a^2y$$

Où a est un paramètre réel.

1. Pour quelles valeurs de a le champ $\overrightarrow{W}$ est un champ antisymétrique ?
2. Déterminer, dans chaque cas, les éléments de réduction du torseur associé.