**Université IBN TOFAÏL**
**Ecole Nationale**
**Des Sciences Appliquées**
**Département**
**De Mathématique**
**-Kénitra-**

**Semestre 3**
**Fontions de Plusieurs Variables**
**Automne 2018**
**Série N°5**
**Pr. Ch. Bensouda**

---

## Exercice 1:

On considère $f$ le champ scalaire de deux variables donné par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si non} \end{cases}.$$

1- Etudier la continuité et la différentiabilité du champ $f$.
2- Le champ $f$ est-il de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?

*****************************************************************

## Exercice 2:

On considère le champ scalaire $f$ donné par

$$f(x,y) = \begin{cases} \left(\frac{x \sin^2 x}{x^2+y^2}\right) & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1- Montrer que le champ $f$ est continu sur $\mathbb{R}^2$
2- Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 du champ $f$ en tout point de $\mathbb{R}^2$
3- Le champ $f$ est-il différentiable sur $\mathbb{R}^2$
4- Le champ $f$ est-il de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$

*****************************************************************

## Exercice 3:

On considère $f$ le champ scalaire défini sur $\mathbb{R}^2$ donné par

$$f(x,y) = \begin{cases} y^2 \sin\left(\frac{x}{y}\right) & \text{si} \ y \neq 0 \\ 0 & \text{si} \ y = 0 \end{cases}$$

1- Montrer que le champ $f$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2- Calculer les dérivées partielles premières du champ $f$ sur $\mathbb{R}^2$.

3- Les dérivées partielles premières du champ $f$ sont-elles continues?

4- Montrer que le champ $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}^2$.

5- Evaluer les dérivées secondes mixtes du champ $f$ en $(0,0)$ et expliquer pourquoi elles sont distinctes.

*************************************************************

## Exercice 4:

Calculer les dérivées partielles secondes des champs scalaires suivants

1) $f(x,y) = xe^y - ye^{-x}2$ ; 2) $g(x,y) = \log\left(1+\sin^2(xy)\right)$

3) $h(x,y) = \log\left(1+\sqrt{x^2+y^2}\right)$ ; 4) $k(x,y,z) = \arctan(xyz)$

5) $Q(x,y,z) = \sqrt{1+x^2y^4z^6}$ ; 6) $r(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

*************************************************************

## Exercice 5:

1- Montrer que les fonctions suivantes sont harmoniques

1) $f(x,y) = e^{kx}\sin ky \qquad k \in \mathbb{R}$

2) $g(x,y) = e^{ky}\cos ky \qquad k \in \mathbb{R}$

3) $h(x,y,z) = e^{3x+4y}\sin 5z$

2- Montrer que pour tout champ scalaire $u$ harmonique sur $\mathbb{R}^2$, le champ $v$ donné par

$$v(x,y) = u\left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\right)$$

reste harmonique.

*************************************************************

## Exercice 6:

Montrer que la fonction $f$ donnée par

$$f(x,y,t) = \frac{1}{t}\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{4t}\right)$$

vérifie l'équation de la diffusion de la chaleur suivante

$$\Delta_{(x,y)}f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial f}{\partial t}.$$

 Pr. Ch. Bensouda