Université Ibn Tofail
Ecole Nationale des Sciences Appliquées
Kénitra - Maroc.

2019/2020

Cycle pérparatoire : Semestre 3
Fonctions de plusieurs variables
Contrôle Continu

Durée 2 heures

Exercice 1 : (5 points : 1+2+2)
Soit $X = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. On pose :

$$\|X\|_1 = |x| + |y|, \qquad \|X\|_2 = \sqrt{|x|^2 + |y|^2}, \qquad \|X\|_\infty = \max(|x|, |y|).$$

1) Montrer que $\|.\|_1$ est une norme sur $\mathbb{R}^2$,
2) Démontrer que pour tout $X = (x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\|X\|_\infty \leq \|X\|_2 \leq \|X\|_1 \leq 2\|X\|_\infty \qquad et \qquad \|X\|_2 \leq \sqrt{2}\|X\|_\infty.$$

3) Representer dans $\mathbb{R}^2$, la boule unité fermée définie par $B_f = \{X = (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \|X\| \leq 1\}$ pour chacune des normes $\|X\|_1$, $\|X\|_2$ et $\|X\|_\infty$.

Exercice 2 : (5 points : 2+1+2)
Soit la fonction f définie par $f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2)^x & \text{si } (x, y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{si } (x, y) = (0,0) \end{cases}$
1) Déterminer le domaine de définition de f. Est-il ouvert ? fermé ?
2) Montrer que f est continue au point $(0,0)$.
3) Calculer les dérivées partielles premières de f.

Exercice 3 : (5 points : 0.5 +1+2+1+ 0.5)
On considère la fonction

$$f(x, y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0,0) \end{cases}$$

1) a) Montrer que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $xy \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$.
b) Montrer que la fonction f est continue en $(0,0)$.
2) Montrer que la fonction f est différentiable en $(0,0)$.
3) a) Calculer les dérivées partielles secondes mixtes de f.
b) f est-elle de classe C^2?

Exercice 4 : (5 points: 2+1.5 +1.5)
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = \begin{cases} y^2 \sin \dfrac{x}{y} & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{cases}$
1) Etudier la continuité et la différentiabilité de f en un point $(a, 0)$ où $a \in \mathbb{R}$.
2) Ecrire la différentielle de f au point $(\frac{\pi}{2}, 1)$: $df_{(\frac{\pi}{2},1)}$.
3) Calculer la dérivée directionnelle de f au point $(\frac{\pi}{2}, 1)$ dans la direction de $\overrightarrow{v} = (1, 1)$.

Bon courage