Université IBN TOFAÏL
Ecole Nationale
Des Sciences Appliquées
Département
De Mathématique
-Kénitra-

Semestre 3
Fontions de Plusieurs
Variables
Automne 2018
Controle N°1
Pr. Ch. Bensouda

Exercice 1:

Soit $(E, \|-\|)$ un espace vectoriel normé.

1- Montrer que toute partie compacte est nécessairement fermée et bornée.

2- Montrer que tout fermé dans un compact est nécessairement compact.

3- Montrer que toute partie compacte est nécessairement complète.

****

Exercice 2:

Déterminer le domaine de définition des champs scalaires suivants

1) $f(x,y) = \left(y^2 - x^2\right)^{-\frac{1}{3}}$

2) $g(x,y) = \sqrt{(x^2 - xy)}$

(Donner une représentation graphique approximative)

****

Exercice 3:

1- On considère f le champ scalaire donné par

$$f(x,y,z) = \left(\frac{y^2 + (xz)^2 + (xyz)^3}{y^2 + (xz)^2}\right) \in \mathbb{R}.$$

i- Déterminer D_f le domaine de définition du champ f.

ii- Montrer que le champ f peut être prolongé par continuité sur $\mathbb{R}^3$ tout entier.

2- On considère g le champ scalaire donné par

$$g(x,y) = \arctan\left(\frac{x+y}{x-y}\right) \in \mathbb{R}.$$

i- Déterminer D_g le domaine de définition du champ g.

ii- Montrer que le champ g ne peut être prolongée par continuité en aucun point $(a,b) \notin D_g$.

****

Exercice 4:

Donner l'équation du plan tangent et de la droite normale aux surfaces S suivantes données par

$$z = f(x,y) \in \mathbb{R}$$

aux points indiqués.

1) $f(x,y) = \sqrt{xy-1}$ en $(1,5)$

2) $f(x,y) = \ln(1+xy)$ (a,a)

****

Pr. Ch. Bensouda

Université IBN TOFAÏL
Ecole Nationale
Des Sciences Appliquées
Département
De Mathématique
-Kénitra-

Semestre 3
Fontions de Plusieurs Variables
Automne 2018
Contrôle terminal
Pr. Ch. Bensouda

Problème:

1- On considère f le champ scalaire de deux variables donnée par

$$f(x,y) = (xy - \arccos xy) \in \mathbb{R}.$$

i- Déterminer D_f, le domaine de définition du champ f (donner une représentation graphique).

ii- Montrer que le champ

$$f \in \mathcal{F}(D_f, \mathbb{R})$$

est différentiable en tout point

$$(x,y) \in \overset{o}{D}_f \subsetneq D_f$$

de l'intérieur du domaine D_f (Justifier votre réponse).

2- On considère la surface de l'espace $\mathbb{R}^3$ donnée par

$$\mathcal{S} = \{(x,y,z) \in (D_f \times \mathbb{R}) \ / \ z = f(x,y)\} \subset \mathbb{R}^3.$$

i- Soit

$$(a,b) \in \overset{o}{D}_f .$$

Donner l'équation du plan tangent à la surface $\mathcal{S}$ au point

$$(a,b,f(a,b)) \in \mathcal{S}.$$

ii- Montre que l'ensemble des points

$$(a,b,f(a,b)) \in \mathcal{S}$$

en lesquels le plan tangent est parallèle au plan d'équation

$$z = x + y$$

est déterminé par

$$\left\{ \begin{array}{c} a = b \in \left]-1, 1\right[\\ a^2 = (1-a)^3 (1+a) (1+a^2) \end{array} \right. .$$

3- On considère les courbes de niveaux du champ f données par les équatons

$$f(x, y) = cste \in \mathbb{R}.$$

i- Montre qu'en tout point

$$(a, b) \in \overset{o}{D}_f \text{ avec } a \neq 0;$$

la courbe de niveau d'équation

$$f(x, y) = f(a, b)$$

admet une paramétrisation locale au voisinage de (a, b) donnée par

$$y = y(x) = \varphi(x)$$

où la fonction φ est dérivable sur un voisinage V de a.

ii- Montrer que la fonction φ est solution d'une équation différentielle du premier ordre.

iii- En déduire l'expression explicite de la fonction φ sur le voisinage V de a.

****

Exercice:

$[0, \frac{\pi}{2}]$

$[0, 1]$

Pour tout

$$a > 0 \;;\; b > 0 \text{ et } c > 0$$

évaluer le volume du solide délimité par l'ellipsoïde d'équation

$$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) = 1.$$

****

Barème:

Problème	:	80 %
Exercice	:	20 %

Bonne chance.