ENSA KENITRA

Année universitaire 2017-2018

Semestre 3

Examen Analyse

(Durée 1H)

*La présentation des copies et la précision des raisonnements seront des éléments notés sur **3 points**.*

Aucun résultat non justifié ne sera pris en considération.

Bon courage

Exercice 1 **(7 points)** On donne la fonction f définie par la somme de la série entière comme suivant:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+2} z^{2n+1}.$$

On admet que le rayon de convergence de f est $R = 1$.

1. Justifiez (sans démonstration) que f est holomorphe sur le disque de centre 0 et de rayon 1.
2. Calculer par la méthode de votre choix les intégrales suivantes:

$$I_1 = \int_C \frac{f(z)}{z+1} dz, \qquad I_2 = \int_C \frac{f(z)}{z^2} dz, \qquad I_3 = \int_C \frac{f(z)}{z} dz,$$

où C est le cercle de centre 0 et de rayon $\frac{1}{2}$.

Exercice 2 **(10 points)** Soit $p > 3/2$. On pose

$$I_p = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{p + \sin(x)}.$$

En transformant I_p en une intégrale complexe sur un contour bien déterminé, calculer I_p en fonction de p par la méthode des résidus.

Année universitaire 2017-2018

Semestre 3

Contrôle Analyse

(Durée 1H30)

***Deux points** sont réservés pour la présentation des copies et la précision des raisonnements.*
Aucun résultat non justifié ne sera pris en considération.

Bon courage

Exercice 1 **(10 points.)** Soit a et R deux réels tels que $0 < a < R$. On note

$$W_{a,R} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ a^2 \leq x^2+y^2+z^2 \leq R^2 \quad \text{avec} \quad a^2 \leq x^2+y^2 \quad \text{et} \quad z \geq 0\},$$

et on pose

$$I_{a,R} = \iiint_{W_{a,R}} z(1+x^2+y^2+z^2)\, dxdydz.$$

1. Donner une paramétrisation de $W_{a,r}$ où la variable libre est z, puis calculer $I_{a,R}$ en fonction de a et R.
2. Retrouver la valeur de $I_{a,R}$ en utilisant un changement de variables en coordonnées sphériques.

Exercice 2 **(8 points.)**

1. Donner la formule de calcul d'aire d'une surface de révolution S autour de l'axe (Oy) et dont la génératrice est une courbe C tracée dans le plan (yoz) paramétrée par

$$\begin{cases} x = 0, \\ y = y(t), \qquad (t \in [a,b]). \\ z = z(t) \end{cases}$$

On rappelle que la matrice de rotation autour de l'axe (Oy) et d'angle θ est $\begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & -\sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) \end{bmatrix}$.

2. **Application**: Calculer l'aire de la parboloïde $(\mathcal{P})$ d'équation $y = x^2+z^2, 0 \leq y \leq 4$.
(Indication: On pourra prendre comme génératrice la courbe tracée dans le plan (yoz) et d'équation $y = z^2, 0 \leq z \leq 2$.)