Université Ibn Tofaïl

Ecole Nationale des Sciences Appliquées
Kenitra

Année universitaire 2016-2017
Semestre 3

Contrôle Analyse

(Durée 1H30)

***Deux points** sont réservés pour la présentation des copies et la précision des raisonnements.*
Aucun résultat non justifié ne sera pris en considération.

Bon courage

Exercice 1 **(8 points.)** Calculer l'intégrale

$$\iint_D \sqrt{x+y+1}\, dxdy,$$

où D est le domaine grisé donné par la figure 1 ci contre.

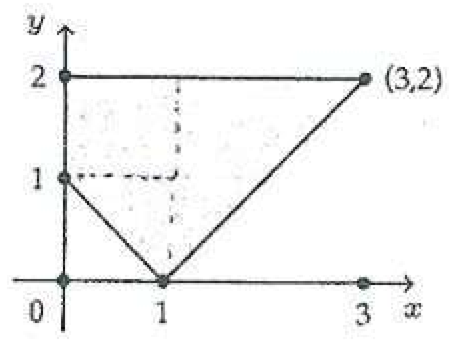

Fig. 1 D est la partie grisée

Exercice 2 **(6 points.)** Soit a et R deux réels tels que $0 < a < R$. On note

$$D_{a,R} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ a^2 \leq x^2+y^2 \leq R^2 \quad \text{et} \quad y \geq 0\right\}.$$

1. Faîtes un schéma de $D_{a,R}$.
2. En utilisant un changement de variables convenable, calculer en fonction de a et R, l'intégral
$$I(a,R) = \iint_{D_{a,R}} \frac{y}{1+x^2+y^2} dxdy.$$
3. Pour a fixé, calculer la limite $\lim_{R\to+\infty} \frac{I(a,R)}{R}$.

Exercice 3 **(4 points.)** Calculer le volume du solide U de $\mathbb{R}^3$ donné

$$U = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0 \quad \text{et} \quad x+y^2+z \leq 2\right\}.$$

Ecole Nationale des Sciences Appliquées
Kénitra

Année universitaire: 2016-2017
Semestre 3

Examen Analyse

(Durée 1H30)

La présentation des copies et la précision des raisonnements seront des éléments notés sur 2 points.
Aucun résultat non justifié ne sera pris en considération.

Bon courage

Exercice 1 **(8 points).** On pose

$$I_k = \int_{\Gamma_k} \frac{e^z}{z^3(z-1)}dz, \quad k = 1,2,3,$$

où les courbes Γ_k sont données par les figures suivantes

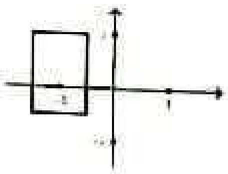

Fig. 1 La courbe Γ_1

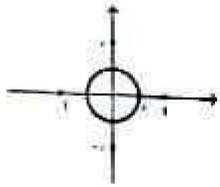

Fig. 2 La courbe Γ_2

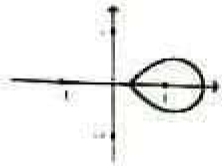

Fig. 3 La courbe Γ_3

En particulier, Γ_2 (donnée par la figure Fig.2) est un cercle de centre 0 et de rayon r tel que $0 < r < 1$.

1. Calculer I_1 et I_3.
2. Montrer que
$$I_2 = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \int_{\Gamma_2} z^{n-3}e^z dz$$
(On admettra que l'on peut intervertir les signes $\sum$ et $\int_{\Gamma_2}$)
3. Calculer en fonction de $n \in \mathbb{N}$, la valeur de l'intégrale
$$J_n = \int_{\Gamma_2} z^{n-3}e^z dz.$$
4. En déduire la valeur de I_2.

Exercice 2 **(10 points).** En appliquant le théorème des résidus à la fonction $f(z) = \frac{e^{iz}}{z^6+1}$ et la courbe $\Gamma_R = [-R, R] \cup C_R$, où C_R est le demi cercle de rayon $R > 1$ et centré à l'origine, (voir figure Fig.4), calculer la valeur de l'intégrale

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x^6+1}dx.$$

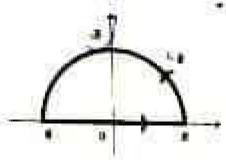

Fig. 4 La courbe Γ_R