Année universitaire 2015-2016

Semestre 3

Ecole Nationale des Sciences Appliquées

Kénitra

Contrôle Analyse

(Durée 1H30)

La présentation des copies et la précision des raisonnements constitueront des éléments importants pour l'évaluation des copies.

Aucun résultat non justifié ne sera pris en considération.

Bon courage

Exercice 1 (Questions de cours: 4 pts) Montrer que l'ensemble

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\, x \geq y\}$$

est un fermé de $\mathbb{R}^2$.

(**Indication**: Penser à la définition d'un fermé ...)

Exercice 2 (6 pts)

On souhaite résoudre l'équation aux dérivées partielles suivante:

$$(E) \quad k\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y}$$

où k est une constante telle que $k \neq 1$ et l'inconnue est une fonction f supposée de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

On pose $\varphi(x,y) = (u,v)$ où $u = x + y$ et $v = x + ky$.

1. Montrer que φ définit un C^1−difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.
2. En posant $f(x,y) = g(u,v)$, résoudre (E).

Exercice 3 (10 pts)

1. **Question préliminaire:** Soit $\alpha > 0$ et $\theta :]-\alpha,\alpha[\to \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que $\theta(t) \geq \theta(0)$ pour tout $t \in]-\alpha,\alpha[$.

   ✓ Monter que la dérivée à droite de θ en 0 est positive et que que la dérivée à gauche de θ en 0 est négative. En déduire que $\theta'(0) = 0$.

2. Maintenant, on considère une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^1. Soit $X_0 = (a,b) \in \mathbb{R}^2$. On fixe une fois pour toute une norme $\|\|$ donnée de $\mathbb{R}^2$ et pour $\rho > 0$ on pose

$$B(X_0,\rho) = \{X \in \mathbb{R}^2,\, \|X - X_0\| < \rho\}$$

Université Ibn Tofaïl

Ecole Nationale des Sciences Appliquées
Kénitra

Année universitaire: 2015-2016
Semestre 3

Examen Analyse

(Durée 1H30)

La présentation des copies et la précision des raisonnements seront des éléments notés sur 2 ***points.***
Aucun résultat non justifié ne sera pris en considération.

Bon courage

Exercice 1 **(6 points)** Calculer l'integral $I = \iint_T (x+y)^2 dxdy$ où T est le triangle plein de sommets A, B et C comme le montre la figure 1. **(Indication:** On pourra remarquer que l'on a $T = T_1 \cup T_2$ où T_1 et T_2 sont les triangles pleins de sommets (A, B, O) et (O, C, B) respectivement et donner une equation paramétrique de T_1 et de $T_2, \dots$)

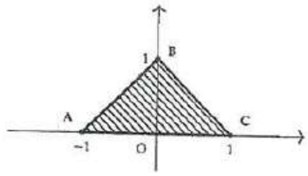

Fig. 1 Le triangle plein T

Exercice 2 **(8 points)** On pose

$$I_k = \int_{\Gamma_k} \frac{e^{1/z^2}}{(z+1)}dz, \quad k = 2,3,4$$

où les courbes Γ_k sont données par les figures suivantes:

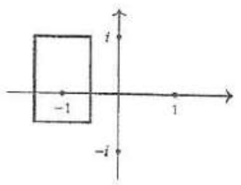

Fig. 2 La courbe Γ_2

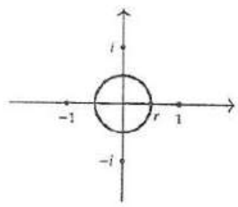

Fig. 3 La courbe Γ_3

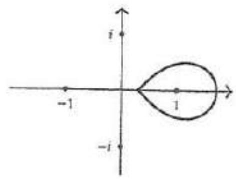

Fig. 4 La courbe Γ_4

En particulier, Γ_3 (donnée par la figure Fig.3) est un cercle de centre 0 et de rayon r tel que $0 < r < 1$.

1. Calculer I_2 et I_4.
2. Montrer que

$$I_3 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{\Gamma_3} \frac{dz}{z^{2n}(z+1)}$$

(On admettra que l'on peut intervertir les signes $\sum$ et $\int_{\Gamma_3}$)

3. Pour une fonction f holomorphe sur un disque $D(z_0, R)$, rappeler (sans démonstration), la valeur de l'intégrale

$$J_n = \int_{C(z_0,r)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^n} dz, \quad n \in \mathbb{N},$$

où $C(z_0, r)$ est le cercle de centre z_0 et de rayon r tel que $0 < r < R$.
(NB: On remarquera la valeur particulière $n = 0$.)

4. En déduire la valeur de I_3.

Exercice 3 **(6 points)** Pour $p > 1$, on pose

$$I_p = \int_0^{2\pi} \frac{p - \sin(x)}{p + \sin(x)} dx$$

En transformant I_p en une intégrale complexe sur un contour bien déterminé, calculer I_p en fonction de p par la méthode des résidus.

On suppose que qu'il existe $r > 0$ tel que pour tout $X \in \mathbb{R}^2$ on a:

$$X \in B(X_0, r) \implies f(X) \geq f(X_0)$$

(On dit X_0 est un minimum local pour f)

Dans la suite on considère $(h,k) \in \mathbb{R}^2$ et on suppose que $(h,k) \neq 0$.

(a) Montrer que pour tout $t \in \left] -\frac{r}{\|(h,k)\|}, \frac{r}{\|(h,k)\|} \right[$, on a $(a + th, b + tk) \in B(X_0, r)$

On définit dans la suite la fonction φ sur $\left] -\frac{r}{\|(h,k)\|}, \frac{r}{\|(h,k)\|} \right[$ par

$$\varphi(t) = f(a + th, b + tk).$$

(b) Montrer que φ est de classe C^1 sur $\left] -\frac{r}{\|(h,k)\|}, \frac{r}{\|(h,k)\|} \right[$ et calculer $\varphi'(t)$ en fonction des dérivées partielles de f.

(c) En utilisant la question préliminaire, montrer que $\varphi'(0) = 0$.

(d) En déduire que $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0$

(e) **Application:** Trouver les minimums éventuels de la fonction f donnée par

$$f(x,y) = x^2 + xy - y^2$$

Ecole Nationale des Sciences Appliquées
Kénitra

Année universitaire: 2015-2016
Semestre 3

Rattrappage Analyse

(Durée 1H)

La présentation des copies et la précision des raisonnements constitueront des éléments importants pour l'évaluation des copies.

Aucun résultat non justifié ne sera pris en considération.

Bon courage

Exercice 1 **(8 pts)**

Calculer le volume du solide U de $\mathbb{R}^3$ donné

$$U = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x \geq 1, y \geq 1, z \geq 0 \quad \text{et} \quad x + y + z^2 \leq 3 \right\}$$

Exercice 2 **(12 pts)**

Soit a un réel tel que $0 < a < 1$. On définit la fonction f de la variable complexe $z \in \mathbb{C}$ par

$$f(z) = \frac{e^{az}}{1 + e^z}$$

1. Déterminer les pôles de f ainsi que leurs multiplicités.
2. Calculer le résidu de f en chacun de ses pôles.
3. Soit $R > 0$. En utilisant comme contour d'intégration le rectangle Γ_R donné par la figure 1, calculer par la méthode des résidus l'intégrale:

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{1 + e^x} dx.$$

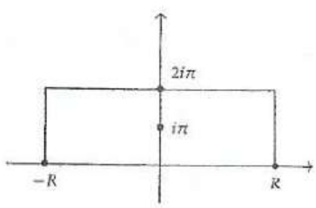

Fig. 1 Rectangle Γ_R