Ecole Nationale des Sciences Appliquées

Kénitra

Année universitaire 2014-2015

Semestre 3

Contrôle Analyse

(Durée 1H30)

La présentation des copies et la précision des raisonnements constitueront des éléments importants pour l'évaluation des copies.

Aucun résultat non justifié ne sera pris en considération.

Bon courage

Exercice 1 (4 pts) On considère la surface S de $\mathbb{R}^3$ donnée par:

$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \quad z \geq 1,\, x^2 + y^2 + z^2 = 2\right\}$$

Calculer l'aire de S.

Exercice 2 (6 pts) On considère le triangle plein T de sommets $A(0,0)$, $B(3,0)$ et $C(1,1)$. (Faîtes un schéma).

1. Trouver une parametrisation de T.
2. Calculez l'intégrale

$$I = \iint_T x(x+y)^2 dxdy$$

Exercice 3 (10 pts) Soit une courbe C de $\mathbb{R}^3$ tracée dans le plan (xoy) donnée par son paramétrage $(x(t), y(t), 0)$, $t \in [a, b]$. On suppose de plus que la courbe C ne traverse pas l'axe (oy).

1. Démontrer que l'aire de la surface de révolution Σ obtenue par la rotation de C autour de l'axe (oy) est

$$\mathcal{A}(\Sigma) = 2\pi \int_a^b |x(t)| \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

2. Calculer l'aire du cône de révolution de $\mathbb{R}^3$ de sommet l'origine $(0,0,0)$, d'axe (oy), de hauteur $h > 0$ et de rayon à la base $R > 0$. (Faîtes un schéma et justifiez vos réponses).

Ecole Nationale des Sciences Appliquées

Kénitra

Année universitaire: 2014-2015

Semestre 3

Examen Analyse

(Durée 1H30)

La présentation des copies et la précision des raisonnements seront des éléments notés sur **2 points.**
Aucun résultat non justifié ne sera pris en considération.

Bon courage

Exercice 1 **(6 points)** On pose

$$I_k = \int_{\Gamma_k} \frac{e^{1/z}}{(z-1)}, \quad k = 1,2,3$$

où les courbes Γ_k sont données par les figures suivantes:

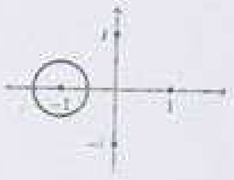

Fig. 1 La courbe Γ_1

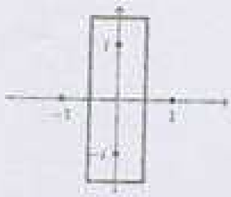

Fig. 2 La courbe Γ_2

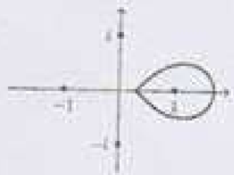

Fig. 3 La courbe Γ_3

1. Calculer I_1 et I_3.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer l'intégrale curviligne $J_n = \int_{\Gamma_2} z^n e^{1/z} dz$.
3. En déduire la valeur de I_2.

Exercice 2 **(12 points)** On donne la fonction $P(x,y) = e^{y^2-x^2}\cos(2xy)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

1. Trouver toutes les fonctions f holomorphes sur $\mathbb{C}$ vérifiant $f(0) = 1$ et dont la partie réelle est P. Donnez l'expression de $f(z)$ en fonction de $z \in \mathbb{C}$.

   Pour $R > 1$ on désigne par C_R le demi cercle tracé dans $\mathbb{C}$ de centre l'origine et de rayon R et on pose $\Gamma_R = [-R, R] \cup C_R$. (Voir Figure 4)

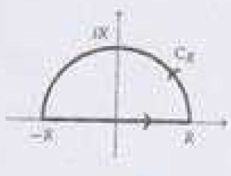

Fig. 4 Courbe Γ_R

2. Calculer, en utilisant le théorème des résidus, l'integrale curviligne $\int_{\Gamma_R} \frac{f(z)}{z^2+1} dz$.
3. Montrer rigoureusement que $\lim_{R\to+\infty} \int_{C_R} \frac{f(z)}{z^2+1} dz = 0$.
4. En déduire la valeur de $I := \int_0^{\infty} \frac{e^{-x^2}}{x^2+1} dx$

Ecole Nationale des Sciences Appliquées
Kénitra

Année universitaire: 2014 - 2015
Semestre 3

Examen de rattrapage: Analyse

(Durée 1H30')

La présentation des copies et la précision des raisonnements seront des éléments notés sur **2 points**.
Aucun résultat non justifié ne sera pris en considération.

Bon courage

Exercice 1 (8 pts).

1. On donne la partie D de $\mathbb{R}^2$ définie par:

$$x \geq 0,\ y \geq 0 \quad \text{et} \quad 1 \leq x+y \leq 3$$

   (a) Tracer D.

   (b) Calculer l'intégrale $\iint_D (x^2 - y^2)\, dx\, dy$.

2. Calculer le volume du solide U de $\mathbb{R}^3$ donné par

$$U = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0 \quad \text{et} \quad x^2+y^2+z \leq 3\right\}$$

Exercice 2 (10 pts).

1. Calculer l'intégrale

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{2} + \cos(\theta)}$$

2. (a) Soit $R > 1$. En utilisant le théorème des résidus calculer l'intégrale

$$J_R = \int_{\Gamma_R} \frac{z}{z^4+1} dz$$

   où la courbe Γ_R est représentée par la figure 1

Fig. 1 Courbe Γ_R

   (b) En déduire la valeur de l'intégrale

$$J = \int_0^{+\infty} \frac{x}{x^4+1} dx$$