Ecole Nationale des Sciences Appliquées
Kénitra

Année universitaire 2013-2014
Semestre 3

Examen d'analyse

(Durée 1H30)

La présentation des copies et la précision des raisonnements constitueront des éléments importants pour l'évaluation des copies. ***Aucun résultat non justifié ne sera accepté.***

Bon courage

Exercice 1 (4 points) Calculer, en justifiant votre réponse, la valeur de l'intégrale

$$I = \int_\Gamma \frac{dz}{z^2(z+1)}$$

où Γ est l'une des courbes Γ_i, $i = 1, 2, 3$ données par les figures suivates:

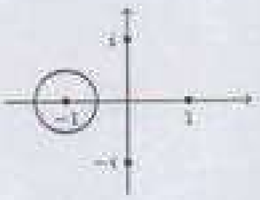

Fig. 1 La courbe Γ_1

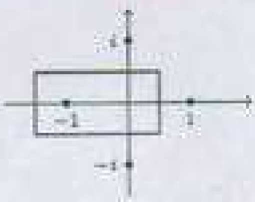

Fig. 2 La courbe Γ_2

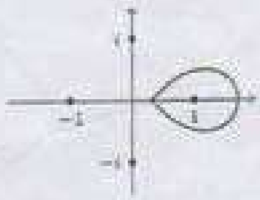

Fig. 3 La courbe Γ_3

Exercice 2 (4 points) Soit $U = \{z \in \mathbb{C};\quad \mathrm{Re}(z) > 0\}$. Si $z = x + iy \in U$, avec $x, y \in \mathbb{R}$, on pose:

$$f(z) = \ln(|z|) + i\mathrm{Arctan}\left(\frac{y}{x}\right)$$

Montrer que f est holomorphe sur U et calculer $f'(z)$ en fonction de z pour $z \in U$.

Exercice 3 On se propose de calculer la valeur de $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$.

On admettra dans la suite que

$$I = \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ R \to +\infty}} \int_\varepsilon^R \frac{\sin x}{x} dx$$

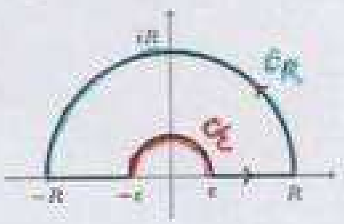

Fig. 4 Courbe $\Gamma_{R,\varepsilon}$

et on considère la fonction de la variable complexe f définie par

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z}$$

et le contour $\Gamma_{\varepsilon,R}$, $0 < \varepsilon < R$, donné par la figure 4.

On désigne par C_ε et C_R les demi-cercles dans $\mathbb{C}$ de centre 0 et de rayons ε et R respectivement tracés dans le demi-plan $\mathrm{Im}(z) \geq 0$ (Voir figure 4)

1. Calculer $\lim_{R \to +\infty} \int_{C_R} f(z)dz$.
2. Calculer $\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{C_\varepsilon} f(z)dz$.
3. En déduire que $I = \frac{\pi}{2}$.

Année universitaire 2013-2014
Semestre 3

Ecole Nationale des Sciences Appliquées
Kénitra

Examen d'analyse

(Durée 1H30)

La présentation des copies et la précision des raisonnements constitueront des éléments importants pour l'évaluation des copies. ***Aucun résultat non justifié ne sera accepté.***

Bon courage

Exercice 1 (4 points) Calculer, en justifiant votre réponse, la valeur de l'intégrale

$$I = \int_\Gamma \frac{dz}{z^2(z+1)}$$

où Γ est l'une des courbes Γ_i, $i = 1, 2, 3$ données par les figures suivates:

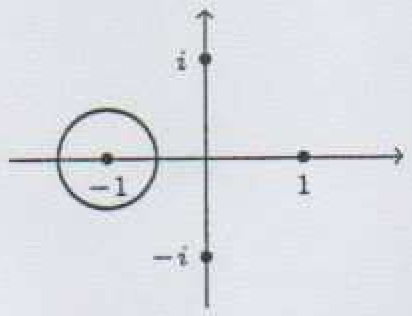

Fig. 1 La courbe Γ_1

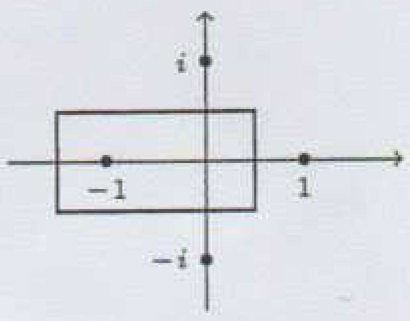

Fig. 2 La courbe Γ_2

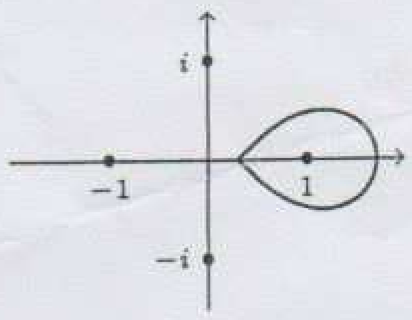

Fig. 3 La courbe Γ_3

Exercice 2 (4 points) Soit $U = \{z \in \mathbb{C}; \quad \mathrm{Re}(z) > 0\}$. Si $z = x + iy \in U$, avec $x, y \in \mathbb{R}$, on pose:

$$f(z) = \ln(|z|) + i\mathrm{Arctan}\left(\frac{y}{x}\right)$$

Montrer que f est holomorphe sur U et calculer $f'(z)$ en fonction de z pour $z \in U$.

Exercice 3 On se propose de calculer la valeur de $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$.

On admettra dans la suite que

$$I = \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ R \to +\infty}} \int_\varepsilon^R \frac{\sin x}{x} dx$$

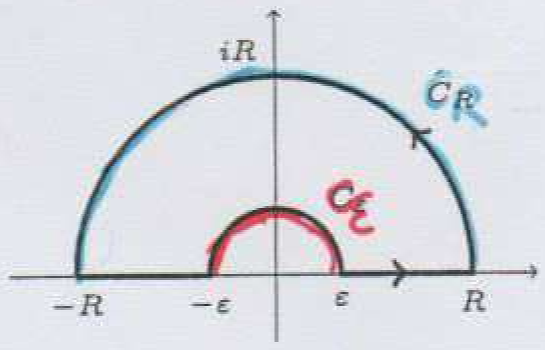

Fig. 4 Courbe $\Gamma_{R,\varepsilon}$

et on considère la fonction de la variable complexe f définie par

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z}$$

et le contour $\Gamma_{\varepsilon,R}$, $0 < \varepsilon < R$, donné par la figure 4.

On désigne par C_ε et C_R les demi-cercles dans $\mathbb{C}$ de centre 0 et de rayons ε et R respectivement tracés dans le demi-plan $\mathrm{Im}(z) \geq 0$ (Voir figure 4)

1. Calculer $\lim_{R\to+\infty} \int_{C_R} f(z)dz$.
2. Calculer $\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{C_\varepsilon} f(z)dz$.
3. En déduire que $I = \frac{\pi}{2}$.

Ecole Nationale des Sciences Appliquées
Kénitra

Année universitaire 2013-2014
Semestre 3

Contrôle Analyse

(Durée 1H30)

La présentation et la précision des raisonnements constitueront des éléments importants pour l'appréciation des copies.

Bon courage

Exercice 1 **(6 pts)**

1. On considère le domaine de $\mathbb{R}^2$ donné par:

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; \quad x \geq 0, y \geq 0, \quad x^{2/3} + y^{2/3} \leq 1\right\}$$

En posant

$$x = r\cos^3\theta \quad \text{et} \quad y = r\sin^3\theta$$

où r et θ sont à définir, calculer $\displaystyle\iint_D xy\,dx\,dy$.

2. En utilisant un changement de variables approprié, calculer la surface du domaine U de $\mathbb{R}^2$ donné par:

$$U = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; \quad x \geq 0, y \geq 0, \quad 1 \leq 4x^2 + y^2 \leq 4\right\}$$

Exercice 2 **(14 pts)**

On considère dans l'espace $\mathbb{R}^3$ la surface $\mathcal{P}$ dont l'équation cartésienne dans la base canonique est

$$(\mathcal{P}): \quad z = x^2 + y^2, \quad z \leq 4$$

($\mathcal{P}$ est une partie d'une paraboloïde elliptique).

1. On se propose ici de calculer l'aire de $(\mathcal{P})$ en cherchant une paramétrisation directe de $(\mathcal{P})$.
   Pour $z_0 \in [0,4]$, on désigne par Π_{z_0} le plan d'équation $z = z_0$.
   (a) Que représente la courbe $\mathcal{C}_{z_0} = \Pi_{z_0} \cap \mathcal{P}$.
   (b) Donner une paramétrisation de la courbe $\mathcal{C}_{z_0}$.
   (c) En déduire l'aire de $(\mathcal{P})$.

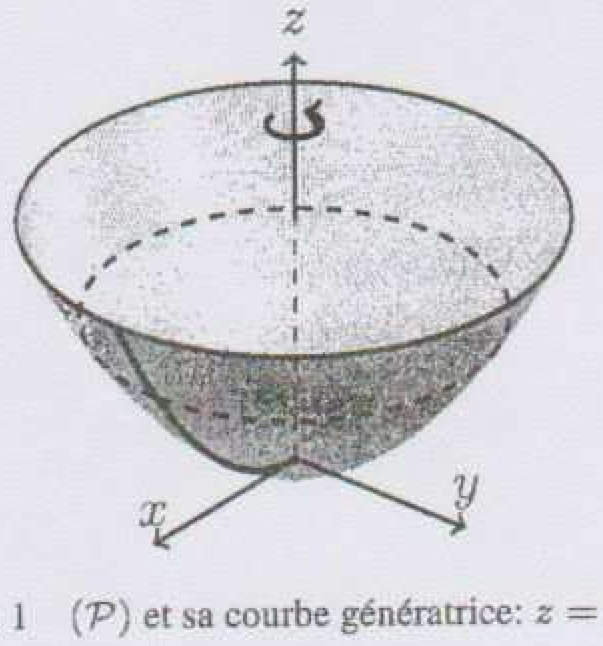

Fig. 1 $(\mathcal{P})$ et sa courbe génératrice: $z = x^2$

2. Calculer l'aire de $(\mathcal{P})$ en remarquant cette fois ci que c'est la surface de révolution obtenue en faisant tourner autour de l'axe (oz) la courbe (parabole) $z = x^2$.

3. Calculer le volume de la partie Ω de $\mathbb{R}^3$ délimité par $(\mathcal{P})$ et définie par:

$$\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; \quad x^2 + y^2 \leq z, \quad \text{et} \quad z \leq 4\right\}$$