Ecole Nationale des Sciences Appliquées
Kénitra

Année universitaire 2012-2013
Semestre 3

Contrôle Analyse Novembre

(Durée 1 H30)

La présentation, la lisibilité, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements constitueront des éléments importants pour l'appréciation des copies.

Tout échange de matériel, de quelconque nature que ce soit, est interdit.

Bon courage

Exercice 1 **(12 pts)** Calculer les intégrales suivantes:

1. **(4 pts)** $\iint_D (x+y)e^{(x^2-y^2)}dxdy$, $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 1\}$
   (Indication: On pourra poser $u = x+y$ et $v = x-y$.)
2. **(4 pts)** $\iint_D xydxdy$, $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq x+y\}$.
3. **(4 pts)** $I_n = \iiint_D \frac{dxdydz}{(x+y+z+1)^{n+1}}$
   $n \in \mathbb{N}$ et $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0 \quad \text{et} \quad x+y+z \leq 1\}$.

Exercice 2 **(8 pts)**

Soit D un domaine plan dans $\mathbb{R}^3$. On suppose que $D \subset (xoz)$ et que D est paramétré par

$$\phi(u,v) = \begin{cases} x = x(u,v) \\ y = 0 \\ z = z(u,v) \end{cases}, \quad (u,v) \in U$$

ϕ de classe $\mathcal{C}^1$ et U étant un compact de $\mathbb{R}^2$. On note par Ω le solide obtenu par la rotation de D autour de l'axe (oz) et on désigne par V le volume de Ω.

1. **(2 pts)** Montrer qu'une paramétrisation de Ω est donnée par:

$$\begin{cases} X = x(u,v)\cos\theta, \\ Y = x(u,v)\sin\theta, \\ Z = z(u,v). \end{cases} \qquad (u,v) \in U, \quad \theta \in [0, 2\pi[$$

2. On suppose de plus que ϕ est injective et que

$$x(u,v) > 0 \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial x}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial z}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial z}{\partial v}(u,v) \end{vmatrix} > 0$$

pour tout $(u,v) \in U$.

(a) **(2 pts)** Montrer que l'application $\psi : (u, v, \theta) \to (X, Y, Z)$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $U \times [0, 2\pi[\to \Omega$.

(b) **(2 pts)** En déduire, par utilisation d'un changement de variables, que le volume de Ω est

$$V = 2\pi \iint_U x(u,v) \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} dudv$$

3. **Application: (2 pts)** Calculer le volume du solide de révolution obtenu par rotation autour de l'axe (oz) du disque C d'équation:

$$\begin{cases} (x-d)^2 + z^2 \leq R^2, \\ y = 0. \end{cases}$$

où $0 < R < d$.

Ecole Nationale des Sciences Appliquées
Année universitaire 2012-2013
Semestre 3

Examen d'analyse

(Durée 1H30)

La présentation, la clarté et la précision des raisonnements constitueront des éléments importants pour l'appréciation des copies.

Bon courage

Exercice 1 En utilisant la méthode des résidus, calculer les intégrales suivantes

1. **(6 points).**
$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2} dx$$

2. **(6 points).**
$$J = \int_{0}^{2\pi} \frac{dx}{(\sin(x)-2)^2}$$

(Ind: Pour l'intégrale I, on pourra, intégrer le long de la courbe Γ_R représenté par la figure 1)

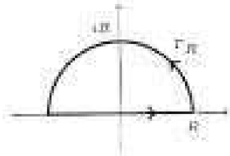

Fig. 1 Courbe Γ_R

Exercice 2 **(10 points).**
Soit f une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$.

1. On pose
$$g(z) = \begin{cases} \dfrac{f(z)-f(0)}{z}, & \text{si } z \neq 0 \\ f'(0) & \text{si } z = 0 \end{cases}$$
Montrer que g est holomorphe sur $\mathbb{C}$.
(**Indication**: Penser à la propriété d'analycité de f ...)

2. En déduire que pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R$ on a:
$$f(z) - f(0) = \frac{z}{2\pi i} \int_{C_R} \frac{f(w)}{w(w-z)} dw$$
où C_R désigne le cercle dans $\mathbb{C}$ de rayon R centré à l'origine orienté dans le sens trigonométrique.

3. On suppose maintenant qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que
$$\sup_{R>0} \int_{0}^{2\pi} |f(Re^{it})| \, dt \leq M$$
Montrer que f est constante.

Ecole Nationale des Sciences Appliquées
Année universitaire 2012-2013
Semestre 3

Contrôle de rattrapage: Analyse

(Durée: 1H30)

La présentation, la clarté et la précision des raisonnements constitueront des éléments importants pour l'appréciation des copies.

Bon courage

Exercice 1 **(8 pts)**

1. On donne $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ y \geq 0,\ x+y \leq 1\}$ et $\Omega = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq u \leq 1, \quad |v| \leq u\}$.

   (a) Soit φ l'application définie par $\varphi(x,y) = (x+y, x-y)$. Montrer que

   $$\begin{cases} \varphi(x,y) = (u,v), \\ (x,y) \in D \end{cases} \quad \text{si et seulement si} \quad \begin{cases} x = (u+v)/2, \quad y = (u-v)/2 \\ (u,v) \in \Omega \end{cases}$$

   (b) En utililisant le changement de variables ci dessus calculer $I = \iint_D (x+y)^2 e^{(x^2-y^2)} dxdy$

2. Calculer le volume du solide U de $\mathbb{R}^3$ donné

   $$U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0 \quad \text{et} \quad x+y+z \leq 1\}$$

Exercice 2 **(12 pts)**

Soit m un réel tel que $0 < m < 1$. On définit la fonction f de la variable complexe $z \in \mathbb{C}$ par

$$f(z) = \frac{e^{mz}}{1+e^z}$$

1. En écrivant z sous la forme $z = a + ib$ où $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, montrer que

   $$1 + e^z = 0 \quad \text{si et seulement si} \quad z = i(2k+1)\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

2. Par la méthode des résidus, calculer l'intégrale:

   $$J = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{mx}}{1+e^x} dx$$

   en utililisant comme contour d'intégration, pour $R > 0$, le rectangle Γ_R donné par la figure 1:

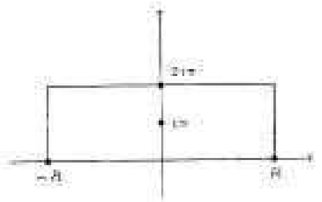

Fig. 1 Rectangle Γ_R

(On rappelle que $(e^z)' = e^z$ pour tout $z \in \mathbb{C}$).