UNIVERSITE IBN TOFAIL
S3, ENSAK

Algèbre bilinéaire **Série 4: Endomorphisme remarquables d'un espace vectoriel euciliditen**

Par D.Gretete

EXERCICE 34 *Soit* $A \in M_n(\mathbb{R})$ *telle que les valeurs propres de* ${}^tA - A$ *sont réelles. Montrer que* A *est symétrique.*

EXERCICE 35 *Soit* n *un entier naturel non nul*

1. *Montrer que pour toute forme linéaire de* $M_n(\mathbb{R})$, *il existe une unique matrice* $A \in M_n(\mathbb{R})$ *telle que* $\forall M \in M_n(\mathbb{R}), f(M) = Tr(AM)$
2. *Montrer que tout hyperplan de* $M_n(\mathbb{R})$ *contient au moins une matrice inversible.*

EXERCICE 36 *Soit* M *une matrice antisymétrique réelle. Montrer que* $(I - M)(I + M)^{-1}$ *existe et est orthogonale.*

EXERCICE 37 *Soit* E *un eve et* B *une base orthonormée de* E. *Etudier dans les cas suivants la nature de l'endomorphisme* f *de* E *dont la matrice dans* B *est* A

1. $A = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -2 & 6 & -3 \\ 6 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$

2. $A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -7 & -4 & 4 \\ 4 & -8 & -1 \\ -4 & -1 & -8 \end{pmatrix}$

3. $A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & 1 & -4 \\ -4 & 4 & -7 \\ 1 & 8 & 4 \end{pmatrix}$

4. $A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2 & -\sqrt{6} & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & 1 & 3 \\ -\sqrt{6} & 3 & 1 \end{pmatrix}$

5. $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

6. $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$

EXERCICE 38 *Soit E un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3 et (i, j, k) une base orthonormée directe de E.*

1. *Ecrire la matrice de la rotation d'angle $\pi/4$ et d'axe orienté par $i + 2j - k$.*

2. *Décomposer la rotation en produit de réflexions.*

EXERCICE 39 *Soient a, b deux vecteurs d'un espace vectoriel euclidien E orienté de dimension 3 et $G = \{x \in E // x \wedge a = b\}$*

1. *Donner une condition nécessaire et suffisante pour que G non vide.*

2. *On suppose $(a|b) = 0$. Déterminer G.*

EXERCICE 40 *Soit E un eve orienté de dimension 3, $a \in E$. Soit u l'endomorphisme de E défini par $u(x) = a \wedge (a \wedge x)$. Trouver les valeurs propres de u.*

EXERCICE 41 *Soit E un eve orienté de dimension 3, $a \in E$. Soit u l'endomorphisme de E défini par $u_k(x) = a \wedge x + kx$ où k un réel.*

1. *Donner une condition necessaire et suffisante pour que u_k soit un automorphisme de E.*

2. *Déterminer les éléments propres u_k.*

3. *L'endomorphisme u_k est-il diagonalisable ?*

4. *On suppose a et b non nuls. Résoudre l'équation $u_k(x) = b$.*

EXERCICE 42 *Soit E un eve orienté de dimension 3, $w \in \mathbb{R}$ et k un vecteur unitaire de E. Soit r la rotation d'angle a autour de k. Soit $x \in E$.*

1. *Démontrer que si x est orthogonal à k alors $r(x) = cos(w)x + sin(w)k \wedge x$.*

2. *Déduire une expression de $r(x)$ pour $x \in E$.*

EXERCICE 43 *Soit E un espace hermitien.*

1. *Montrer que tout endomorphisme autoadjoint de E est diagonalisable et de spectre réel.*

2. Soit u un endomorphisme de E. Montrer que les valeurs propres de uou^* sont réelles positives.

3. Soient $(v_1, .., v_n)$ une base orthonormée de vecteurs propres de uou^* telle que $(v_{k+1}, .., v_n)$ soit une base de $ker uou^*$. On note $\lambda_1^2, ... \lambda_k^2$ les valeurs propres associées à $v_1, .., v_k$

   On pose $y_i = \frac{1}{\lambda_i} u(v_i), i = 1, .., k$.

   Montrer que $(y_i)_{1 \leqslant i \leqslant k}$ est une famille orthonormée

4. Soit $x \in vect(y_1, .., y_k)^{\perp}$. Montrer que $u^*(x) = 0$

5. Montrer que $Imu^* = (keru)^{\perp}$ et $keru = (Imu)^{\perp}$.

6. Soit A une matrice complexe d'ordre n. Soit $B = \begin{pmatrix} 0 & A^* \\ A & 0 \end{pmatrix}$.

EXERCICE 44 On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & tan\theta & 0 \\ -tan\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, où $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}[$, et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A.

1. Montrer que $u + Id$ est inversible.

2. On pose $r = (-u + Id)(u + Id)^{-1}$. Montrer que r est une rotation et déterminer ses éléments caractéristiques.