UNIVERSITE IBN TOFAIL
S3, ENSAK

Algèbre bilinéaire **Série 3: Projecteurs et symétries orthogonales**

Par D.Gretete

EXERCICE 22 *Pour $A \in M_n(\mathbb{R})$, on pose $(A|B) = Tr({}^tAB)$ et $\|A\| = Tr({}^tAA)$*

1. *Montrer qu'il s'agit bien d'un produit scalaire sur $M_n(\mathbb{R})$.*
2. *Montrer que pour tout $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, $\|AB\| \leqslant \|A\|\|B\|$.*
3. *Soit p la projection orthogonale sur l'espace I des matrices scalaires. Donner en utilisant p, la distance $d(J, I)$ où J est la matrice de $M_n(\mathbb{R})$, ayant tous ses coefficients égaux à 1.*

EXERCICE 23 *On définit sur $\mathbb{R}[X]$ pour le produit scalaire :*

$$(P \mid Q) = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,dt.$$

On note $F = \{P \in \mathbb{R}_4[X];\ P(0) = P(1) = P(-1)\}$.

1. *Montrer que F est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ et donner sa dimension.*
2. *Donner une base orthonormée $\mathcal{B}$ de F.*
3. *Calculer $d(P, F)$, où $P = 1 + X + X^2$.*

EXERCICE 24 *Soit $E = \mathbb{R}^4$ muni de sa structure euclidienne canonique et*

$$F = \{u = (x, y, z, t)/x + y + z + t = x - y + z - t = 0\}.$$

1. *Déterminer une base orthonormée de $F^\perp$*
2. *Ecrire dans la base canonique de $E = \mathbb{R}^4$, la matrice de la projection orthogonale p sur F.*
3. *Ecrire dans la base canonique de $E = \mathbb{R}^4$, la matrice de la symétrie orthogonale par rapport à F* $\boxed{S(x) + x = 2p(x)}$
4. *Calculer $d(u, F)$, où $u = (1, 0, -1, 1)$.*

EXERCICE 25 *Soit E un espace vectoriel euclidien muni d'une base orthonormée $B = (i, j, k)$. Soit p l'endomorphisme de E de matrice dans la base B, $M = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$*

Montrer que p est une projection orthogonale par rapport à un plan F, et donner une équation de F.

EXERCICE 26 *Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n, pour $u \in E - \{0\}$, on note p_u la projection orthogonale par rapport à la droite $\mathbb{R}u$. Soit $B = (e_1, e_2, ..., e_n)$ une base orthonormée de E.*

1. *Calculer $I = \sum_{k=1}^{n} \|p_{e_k}(u)\|$.*
2. *Calculer $J = \sum_{k=1}^{n} \|p_u(e_k)\|$.*
3. *Simplifier $\sum_{k=1}^{n} p_{e_k}$.*

EXERCICE 27 *Soient F, G deux sev d'un ev euclidien E tels que $F^{\perp} \perp G^{\perp}$. On note p_F et p_G les projections orthogonales sur F et sur G. Montrer que $p_F + p_G - p_{F\cap G} = id_E$ et $p_F \circ p_G = p_G \circ p_F = p_{F\cap G}$.*

EXERCICE 28 *Soit E un espace vectoriel euclidien et p, q deux projections orthogonales. Montrer que p et q commutent si et seulement si $(\Im mp \cap \Im mq)^{\perp} \cap \Im mp$ et $(\Im mp \cap \Im mq)^{\perp} \cap \Im mq$ sont orthogonaux.*

EXERCICE 29 *Soit E un ev euclidien, et $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ des vecteurs unitaires tels que : $\forall \vec{x} \in E, \quad \|\vec{x}\|^2 = \sum_{i=1}^{n} (\vec{x} \mid \vec{e}_i)^2$.*

1. *Démontrer que $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ est une base orthonormale de E.*
2. *On remplace l'hypothèse : $\vec{e}_i$ unitaire par : $\dim E = n$.*
3. *Démontrer que $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ est une base de E.*
4. *Démontrer que : $\forall \vec{x}, \vec{y} \in E$, $(\vec{x} \mid \vec{y}) = \sum_{i=1}^{n} (\vec{x} \mid \vec{e}_i)(\vec{y} \mid \vec{e}_i)$.*
5. *On note G la matrice de Gram de $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$. Démontrer que $G^2 = G$ et conclure.*

EXERCICE 30 *Soient $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ des vecteurs d'un ev euclidien E, et G leur matrice de Gram.*

1. *Montrer que $rgG = rg(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$.*
2. *Montrer que $\det G$ est inchangé si on remplace $\vec{x}_k$ par $\vec{x}_k - \sum_{i\neq k} \lambda_i \vec{x}_i$.*
3. *Soit $F = vect(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ et $\vec{x} \in E$. On note $d(\vec{x}, F) = \min(\|\vec{x} - \vec{y}\|, \vec{y} \in F)$.*

   Montrer que $d(\vec{x}, F)^2 = \dfrac{Gram(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n, \vec{x})}{Gram(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)}$.

EXERCICE 31 1. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible. Montrer qu'il existe une matrice orthogonale, P, et une matrice triangulaire supérieure à coefficients diagonaux positifs, T, uniques telles que $M = PT$.

2. Application : inégalité de Hadamard. Soit E un espace vectoriel euclidien. $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ une base orthonormée, et $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n$ des vecteurs quelconques.

   Démontrer que $|\det_{(\vec{e}_i)}(\vec{u}_j)| \leqslant \prod_j \|\vec{u}_j\|$. Étudier les cas d'égalité.

EXERCICE 32 On considère le système S: $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 2y - z = 1 \\ x + 2y = 0 \\ x + 2y + 3z = 1 \end{cases}$

1. Le système admet-il des solutions?
2. Donner la meilleur solution au sens des moindres carrés

EXERCICE 33 E un préhilberiten de dimension finie $n > 1$, $B = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E. On considère les vecteurs $u = \sum_{k=1}^{n} k e_k$, $v = \sum_{k=1}^{n} e_k$ et $F = vect(u, v)$

1. Quelle est la dimension de F?
2. Donner une base orthonormée de F
3. Déterminer la matrice dans B de la symétrie orthogonale par rapport à F
4. Donner un réel a positif tel qu'il existe une réflexion s qui transforme u en av.
5. Donner la matrice de s.