UNIVERSITE IBN TOFAIL
S3, ENSAK

Algèbre bilinéaire **Série 2: Produit scalaire**

Par D.Gretete

EXERCICE 14 *Dire si les applications suivantes sont des produits scalaires :*

1. $E = \mathbb{R}^2$, $(x, x') \mid (y, y') = axy + bxy' + cx'y + dx'y'$ *(étudier* $(1, t) \mid (1, t)$, $t \in \mathbb{R}$, *et on discutera suivant les valeurs de a,b,c et d).*
2. $E = \mathbb{R}^n$, $(x_1, \ldots, x_n) \mid (y_1, \ldots, y_n) = n \sum_i x_i y_i + \sum_{i \neq j} x_i y_j$
3. $E = \mathbb{R}_n[X]$, $(P \mid Q) = \sum_{i=0}^{n} P(i)Q(i)$.

EXERCICE 15 *Trouver une base orthonormée de* $\mathbb{R}_3[X]$ *pour le produit scalaire :*

$$(P \mid Q) = \int_{t=-1}^{1} P(t)Q(t)\, dt.$$

EXERCICE 16 *Soit* E *un espace euclidien de dimension 4,* $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_4)$ *une base orthonormée de* E, *et* F *le sev d'équations dans* $\mathcal{B}$: $\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x + 2y + 3z + 4t = 0 \end{cases}$

1. *Trouver une base orthonormée de* F.
2. *Trouver une base orthonormée de* $F^\perp$.

EXERCICE 17 *On munit* $\mathbb{R}^3$ *du produit scalaire usuel. Soit* $F = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ *tq* $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0\}$ *où* a_1, a_2, a_3 *sont des réels donnés non tous nuls.*

1. *Déterminer l'orthogonal de* F.
2. *Trouver une base orthonormée de* F.

EXERCICE 18 *Soit* E *un ev muni d'un produit scalaire (de dimension éventuellement infinie) et* $(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n)$ *une famille orthonormée de* E. *On note* $F = vect(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n)$.

1. *Démontrer que* $F \oplus F^\perp = E$ *et* $F^{\perp\perp} = F$.

2. Soit $\vec{x} \in E$. Démontrer que $\sum_{i=1}^{n} (\vec{x} \mid \vec{u}_i)^2 \leq \|\vec{x}\|^2$. Quand a-t-on égalité ?

Application : Soit $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ continue. On appelle coefficients de Fourier de f les réels :

$$c_k(f) = \int_{t=0}^{2\pi} f(t)\cos(kt)dt \qquad \text{et} \qquad s_k(f) = \int_{t=0}^{2\pi} f(t)\sin(kt)dt.$$

3. Démontrer l'inégalité de Bessel : $\int_{t=0}^{2\pi} f^2(t)dt \geq \dfrac{c_0(f)^2}{2\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{c_k(f)^2 + s_k(f)^2}{\pi}$.

EXERCICE 19 Soit E un espace vectoriel euclidien. Soient a, b deux nombres réels et $u \in E$. Déterminer l'ensemble des x de E vérifiants:

$$(x|x) + a(x|u) + b = 0$$

EXERCICE 20 Soit n un entier supérieur à 3. $M_{n,1}(\mathbb{R})$ étant muni de son produit scalaire canonique défini par $(A|B) = ({}^tA)B$.

Soient A, B deux éléments de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ non nuls, et $M = I_n + A\,{}^tB$.

1. Montrer que M est inversible.
2. Déterminer les valeurs propres de M
3. On identifie M à un endomorphisme de $M_{n,1}(\mathbb{R})$. Déterminer les sous espaces propres de M.

EXERCICE 21

$$(P \mid Q) = \int_{-1}^{1} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt.$$

1. Montrer qu'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$
2. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 0$, il existe un unique polynôme T_n tel que pour tout réel θ, $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$.
3. Montrer que la famille (T_n) est orthogonale
4. Construire alors une base orthonormée de $\mathbb{R}_n[X]$ pour le produit scalaire ainsi défini.