UNIVERSITE IBN TOFAIL
S3, ENSAK

Algèbre bilinéaire **Série 1: Formes quadratiques**

Par D.Gretete

EXERCICE 1 *On considère la fonction définie sur* $\mathbb{R}^3$ *par:*

$$q(x, y, z) = x^2 + y^2 + 5z^2 - 2yz - 2xz + 6xy$$

1. *Montrer que* q *est une forme quadratique de* $\mathbb{R}^3$.
2. *Donner la forme polaire de* q. : dédoublement de la var
3. *Donner la matrice de* q *dans la base canonique* $\mathcal{B}$ *de* $\mathbb{R}^3$.
4. *Soit* $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3)$ *la famille de vecteurs de* $\mathbb{R}^3$ *donnés par* $v_1 = (1, 1, 0), v_2 = (1, 0, 1), v_3 = (0, 1, 1)$.
   (a) *Vérifier que* $\mathcal{B}'$ *est une base de* $\mathbb{R}^3$.
   (b) *Donner la matrice de* q *dans la base* $\mathcal{B}'$.

EXERCICE 2 *On considère les applications de* $\mathbb{R}[X]$ *dans* $\mathbb{R}$ *définies pour tout* $P \in \mathbb{R}[X]$ *par :*

$$q_1(P) = P(0).P(1).P(2); q_2(P) = P(0).P(1), q_3(P) = |P(0).P(1)|$$

Déterminer parmi ces applications lesquelles sont des formes quadratiques et dans ce cas, préciser leur formes polaires.

EXERCICE 3 *Sur* $E = \mathbb{R}^2$ *ou* $\mathbb{R}^3$ *muni de sa structure euclidienne usuelle, réduire en base orthonormée les formes quadratiques suivantes :*

1. $Q((x, y)) = x^2 + 10xy + y^2$.
2. $Q((x, y)) = 6x2 + 4xy + 9y2$.
3. $Q((x, y, z)) = 4x^2 + 9y^2 - z^2 + 2\sqrt{6}xy + 10\sqrt{2}xz + 2\sqrt{3}yz$.

EXERCICE 4 *Soient* $f_1, f_2, \dots, f_n$ n *fonctions continues sur* $[a, b]$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}$. *Pour* $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$, *on pose* $b_{i,j} = \int_a^b f_i(t)f_j(t)\, dt$ *puis pour* $(x_1, \dots x_n) \in \mathbb{R}^n$, $Q((x_1, \dots, x_n)) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} b_{i,j} x_i x_j$.

1. *Montrer que* Q *est une forme quadratique positive.*

2. *Montrer que* Q *est définie positive si et seulement si la famille* $(f_1, \dots, f_n)$ *est libre.*

3. *Ecrire la matrice de* Q *dans la base canonique de* $\mathbb{R}^n$ *dans le cas particulier :* $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, $\forall t \in [a, b]$, $f_i(t) = t^{i-1}$.

EXERCICE 5 *Rang et signature des formes quadratiques suivantes :*

1. $Q((x, y, z)) = 2x^2 - 2y^2 - 6z^2 + 3xy - 4xz + 7yz$.

2. $Q((x, y, z)) = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 2xy - 2xz - 2yz$

3. $Q((x, y, z, t)) = xy + yz + zt + tx$.

4. $Q((x, y, z, t)) = x^2 + (4 + \lambda)y^2 + (1 + 4\lambda)z^2 + \lambda t^2 + 4xy + 2xz + 4(1 - \lambda)yz + 2\lambda yt + (1 - 4\lambda)zt$.

5. $Q((x_1, \dots, x_5)) = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} x_i x_j$.

6. $Q((x_1, \dots, x_n)) = \sum_{1 \leqslant i, j \leqslant n} ij x_i x_j$.

7. $Q((x_1, \dots, x_n)) = \sum_{1 \leqslant i, j \leqslant n} x_i x_j$.

8. $Q((x_1, \dots, x_n)) = \sum_{1 \leqslant i, j \leqslant n} Inf(i, j) x_i x_j$.

EXERCICE 6 *Soit* $q : \mathbb{R}_3[X] \longrightarrow \mathbb{R}$ *définie par:*

$$q(P) = P^2(0) + P^2(1) + P^2(2) + P^2(3).$$

1. *Montrer que* q *est une forme quadratique sur* $\mathbb{R}_3[X]$ *et donner sa forme polaire .*

2. *Donner la signature de* q.

3. *Donner une base de* $\mathbb{R}_3[X]$ *dans laquelle* q *s 'écrit sous sa forme de Sylvester (penser aux polynômes d'interpolation).*

4. *Déterminer une base de l'orthogonal pour* q *de l'ensemble*

$$\{X(X - 1); X(X - 1)(X - 2)\}.$$

EXERCICE 7 *Soit* $E = \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$. *Soit* $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. *On pose*

$$\forall f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2), \ Q(f) = \lambda Tr(f^2) + \mu det(f).$$

1. *Vérifier que* Q *est une forme quadratique sur* E.

2. *Déterminer en fonction de* λ *et* μ *le rang et la signature de* Q. *Analyser en particulier les cas* $(\lambda, \mu) = (1, 0)$ *et* $(\lambda, \mu) = (0, 1)$.

$q(x) = (x+y)^2 + (x+2y)^2$

EXERCICE 8 *Pour chacune des applications ci-dessous montrer qu'il s'agit d'une forme quadratique sur E, déterminer sa forme polaire et son noyau:*

970

$$q_1 : f \mapsto \int_{-1}^{1} f^2(t)dt,\ q_2 : f \mapsto \int_0^1 f^2(t)dt,\ q_3 : f \mapsto \int_{-1}^{1} g(t).f^2(t).dt$$

EXERCICE 9 *Montrer que l'expression $\Phi(P) = 2P(1).P'(1)$ définit sur $\mathbb{R}_2[X]$ une forme quadratique; quelle est sa forme polaire ?*

Donner la matrice de Φ dans la base $(1, X, X^2)$. Donner le noyau de Φ.

EXERCICE 10 *Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$. Pour $P \in E$, on pose $Q(P) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(k)P(-k)e^{-k}$.*

1. *Montrer que Q est une forme quadratique sur E.*
2. *Déterminer sa signature.*

EXERCICE 11 *On considère sur $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, l'application Φ définie par*

$$\Phi(M) = \det(M).$$

1. *Montrer que Φ est une forme quadratique et déterminer sa matrice dans la base canonique.*
2. *Déterminer le noyau, le rang et la signature de Φ.*
3. *$F = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid \operatorname{Tr}(A) = 0\}$. Montrer que F est un sev de E.*

EXERCICE 12 *Répondre aux mêmes questions que l'exercice précédent pour $q(M) = \operatorname{Tr}(M^2)$. Puis montrer que les ensemble des matrices symétriques et antisymétriques de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ sont supplémentaires orthogonaux pour q.*

EXERCICE 13 *Soient $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, et les matrices $A, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définies par:*

$$D = \operatorname{diag}(1, 3, \ldots, 2n-1) \quad \text{et } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 2 & \ddots & \vdots \\ 0 & 2 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & n-1 \\ 0 & \cdots & 0 & n-1 & 0 \end{pmatrix}$$

On note $B = D + A$ et q la forme quadratique sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ définie par :

$$q(X) = {}^tXBX.$$

1. *Montrer que pour tout $X \in \mathbb{R}^n$*

$$q(X) = n.x_n^2 + \sum_{1 \leqslant k \leqslant n-1} k(x_k - x_{k+1})^2.$$

2. *En déduire le rang et la signature de q.*

3. **Application:** *Soit $(u_n)_{n\in \mathbb{N}^*} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$ telle que $\sum u_n^2$ converge, on note:*

$$U_n = \frac{1}{n}\sum_{1\leqslant k\leqslant n} u_k \quad et \quad S_n = \sum_{1\leqslant k\leqslant n} U_k^2$$

   (a) *Exprimer u_k en fonction de U_k et U_{k-1}.*

   (b) *Montrer que $\forall n \geqslant 1$.*

$$\sum_{1\leqslant k\leqslant n} U_k^2 \leqslant 2\sum_{1\leqslant k\leqslant n} u_k U_k \quad et \quad \forall n \geqslant 1, S_n \leqslant 2\sqrt{\sum_{1\leqslant k\leqslant n} u_k^2}\sqrt{S_n}$$

   indication: utiliser le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^n$.

   (c) *En déduire que $\sum U_n^2$ converge.*