Université Ibn Tofail
Ecole Nationale des Sciences Appliquées Kénitra

Algèbre bilinéaire et sesquilinéaire

Chapitre 1 : Espaces préhilbertiens et euclidiens

semestre 3

Classes préparatoires

Pr. ADIL MAJDOUBI

2020-2021

CHAPITRE

1 Espaces préhilbertiens et euclidiens

1 Produit scalaire et norme associée

1.1 Produit scalaire

Définition 1.1

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. On appelle produit scalaire sur E toute forme bilinéaire symétrique définie positive, c'est-à-dire toute application φ de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant :

- φ est bilinéaire. Pour tous réels $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ et pour tous vecteurs x, x_1, x_2, y, y_1, y_2 de E,
$$\begin{cases} \varphi(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y) & = \alpha_1 \varphi(x_1, y) + \alpha_2 \varphi(x_2, y) \\ \varphi(x, \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2) & = \beta_1 \varphi(x, y_1) + \beta_2 \varphi(x, y_2) \end{cases}$$
- φ est symétrique. $\forall (x, y) \in E^2 \quad \varphi(x, y) = \varphi(y, x)$;
- φ est définie. $\forall x \in E \quad \varphi(x, x) = 0 \Longrightarrow x = 0$
- φ est positive. $\forall x \in E \quad \varphi(x, x) \geq 0$.

Remarques.

1. En résumant les deux dérniers points en disant que φ est définie-positive.
2. Pour montrer qu'une application φ de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ est bilinéaire, on peut :
   - montrer d'abord qu'elle est linéaire par rapport à la première variable ;
   - puis qu'elle est symétrique, ce qui établit la bilinéarité.

Notation :

- Si φ est un produit scalaire et si $(x, y) \in E^2$, alors le réel $\varphi(x, y)$ est appelé le produit scalaire de deux éléments x et y de E et est noté généralement $(x|y)$ ou $\langle x|y \rangle$ ou $x.y$.
- En géométrie, on privilégie souvent la notation $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$ pour désigner le produit scalaire des deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

Exemple 1.1

L'application :
$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto \langle x|y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \end{aligned}$$
où $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, \ldots, y_n)$, est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$, il est appelé **produit**

scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$. En effet :

- pour tous réels α_1, α_2 et pour tous vecteurs x, x', y de $\mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned}\langle \alpha_1 x + \alpha_2 x' | y\rangle &= \sum_{i=1}^{n} (\alpha_1 x_i + \alpha_2 x'_i) y_i = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_1 x_i y_i + \alpha_2 x'_i y_i) \\ &= \alpha_1 \sum_{i=1}^{n} x_i y_i + \alpha_2 \sum_{i=1}^{n} x'_i y_i = \alpha_1 \langle x|y\rangle + \alpha_2 \langle x'|y\rangle,\end{aligned}$$

  donc l'application est linéaire par rapport à la première variable.
- pour tous vecteurs x, y de $\mathbb{R}^n$,

$$\langle x|y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i = \langle y|x\rangle,$$

  donc l'application est symétrique.
- pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\langle x|x\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geq 0 \quad \text{et } \langle x|x\rangle = 0 \Longrightarrow x_i = 0, \ \ \forall i \in \{1, \dots, n\} \Longrightarrow x = 0,$$

  d'où l'application est définie-positive.

Exemple 1.2

Soit $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$, avec $a < b$. Posons $E = \mathscr{C}([a, b], \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions numériques continues sur $[a, b]$.

L'application :

$$\begin{aligned} E^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (f, g) &\longmapsto \langle f|g\rangle = \int_a^b f(t)g(t)\,dt \end{aligned}$$

est un produit scalaire sur E. En effet :

- la bilinéarité et la positivité de l'application découle de la linéarité et de la positivité de l'intégrale.
- pour toutes fonctions f, g de E,

$$\langle f|g\rangle = \int_a^b f(t)g(t)\,dt = \int_a^b g(t)f(t)\,dt = \langle g|f\rangle,$$

  donc l'application est symétrique.
- pour toute fonction f de E,

$$\langle f|f\rangle = \int_a^b f^2(t)\,dt = 0 \Longrightarrow f = 0,$$

  car f^2 est positive et continue, d'où l'application est définie.

Exemple 1.3

L'application :

$$\begin{aligned} \mathscr{M}_n(\mathbb{R})^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (A, B) &\longmapsto \langle A|B\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{i,j}B_{i,j} = Tr({}^tAB) \end{aligned}$$

est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, il est appelé **produit scalaire canonique de** $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 1.1
Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ et $\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$\forall (P,Q) \in E \times E, \quad \varphi(P,Q) = P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + P(2)Q(2).$$

Montrez que φ est un produit scalaire sur E.

Définition 1.2
On appelle **espace préhilbertien** réel tout $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire. Lorsque l'espace vectoriel est de dimension finie, on parle d'**espace vectoriel euclidien**.

1.2 Inégalité de Cauchy-Schwarz

Théorème 1.1
Soit E un espace préhilbertien réel dont le produit scalaire est noté $\langle\ |\ \rangle$.

$$\forall (x,y) \in E^2 \quad \langle x|y\rangle^2 \leq \langle x|x\rangle \langle y|y\rangle$$

L'égalité est vérifiée si et seulement si x et y sont colinéaires.

Démonstration.

- Si $y = 0$, l'inégalité est évidente (c'est une égalité).
- Si $y \neq 0$, observons que $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ $\langle x+\lambda y | x + \lambda y\rangle \geq 0$, c'est-à-dire :

$$\langle x|x\rangle + 2\lambda \langle x|y\rangle + \lambda^2 \langle y|y\rangle \geq 0 \text{ avec } \langle y|y\rangle > 0$$

On reconnait un trinôme du second degré en λ qui garde un signe constant : il a au plus une racine réelle, son discriminant est donc négatif ou nul :

$$\Delta' = \langle x|y\rangle^2 - \langle x|x\rangle\langle y|y\rangle \leq 0,$$

ce qui donne l'inégalité annoncée.
Il reste à montrer que $\langle x|y\rangle^2 = \langle x|x\rangle\langle y|y\rangle \Leftrightarrow x$ et y sont colinéaires :

$\Rightarrow$ Supposons $\langle x|y\rangle^2 = \langle x|x\rangle\langle y|y\rangle$, soit $y = 0$ et il est colinéaire à x, soit $y \neq 0$ et $\Delta' = 0$, le trinome précédent posséde alors une racine double λ_0, qui vérifie donc $\langle x + \lambda_0 y | x + \lambda_0 y\rangle = 0$ d'où $x + \lambda_0 y = 0$; x et y sont liés.

$\Leftarrow$ Réciproquement, si x et y sont liés, il existe un réel λ tel que $y = \lambda x$ ou $x = \lambda y$. Les vecteurs x et y jouant un rôle symétrique, on peut supposer que $y = \lambda x$. Alors :

$$\langle x|y\rangle^2 = \langle x|\lambda x\rangle^2 = \lambda^2 \langle x|x\rangle^2 = \langle x|x\rangle\langle y|y\rangle.$$

□

Exemple 1.4

Soient $(x_i)_{1\le i\le n}$ et $(y_i)_{1\le i\le n}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$. L'inégalité de Cauchy-Schwarz pour le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$ s'écrit :

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i\right| \le \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)^{1/2}.$$

Exemple 1.5

L'inégalité de Cauchy-Schwarz pour le produit scalaire sur $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$ défini par :

$$(f,g) \longmapsto \langle f|g\rangle = \int_a^b f(t)g(t)\,dt$$

s'écrit :

$$\left|\int_a^b f(t)g(t)\,dt\right| \le \left(\int_a^b f^2(t)\,dt\right)^{1/2} \left(\int_a^b g^2(t)\,dt\right)^{1/2}.$$

Exemple 1.6

Soient A et B deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. L'inégalité de Cauchy-Schwarz pour le produit scalaire canonique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ s'écrit :

$$\left|Tr({}^tAB)\right| \le \left(Tr({}^tAA)\right)^{1/2} \left(Tr({}^tBB)\right)^{1/2}.$$

1.3 Norme euclidienne

Définition 1.3

Dans un espace vectoriel réel E, on appelle norme toute application N de E dans $\mathbb{R}$ telle que :

1. $\forall x \in E \quad N(x) \ge 0$;
2. $\forall x \in E \quad N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
3. $\forall k \in \mathbb{R} \ \forall x \in E \quad N(kx) = |k|N(x)$;
4. $\forall (x,y) \in E^2 \quad N(x+y) \le N(x) + N(y)$.

Théorème 1.2

Soit E un espace préhilbertien réel dont le produit scalaire est noté $\langle\,|\,\rangle$.
L'application de E dans $\mathbb{R}^+$ définie par : $\|x\| = \sqrt{\langle x|x\rangle}$ est une norme, appelée norme euclidienne associée au produit scalaire.

Démonstration. Les points 1. et 2. figurent dans la définition du produit scalaire.
3. $\|kx\| = \sqrt{\langle kx|kx\rangle} = \sqrt{k^2\langle x|x\rangle} = |k|\sqrt{\langle x|x\rangle}$
4. $\|x+y\|^2 = \langle x+y|x+y\rangle = \langle x|x\rangle + 2\langle x|y\rangle + \langle y|y\rangle = \|x\|^2 + 2\langle x|y\rangle + \|y\|^2$.
D'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz on a $\langle x|y\rangle \le \|x\|\|y\|$, donc

$$\|x+y\|^2 \le \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$$

d'où $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$.
(L'égalité est vérifiée si et seulement si x et y sont colinéaires et de même sens.) □

Une norme permet de définir une distance :

Définition 1.4
Soit E un espace préhilbertien réel dont le produit scalaire est noté $\langle\ |\ \rangle$.
On appelle **distance euclidienne** associée au produit scalaire $\langle\ |\ \rangle$ l'application de E^2 dans $\mathbb{R}^+$ définie par : $d(x,y) = \|x-y\|$.

En utilisant la bilinéarité du produit scalaire, on obtient facilement :

Propriétés
$\forall (x,y) \in E^2$

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x|y\rangle + \|y\|^2 \quad ; \quad \|x-y\|^2 = \|x\|^2 - 2\langle x|y\rangle + \|y\|^2$$

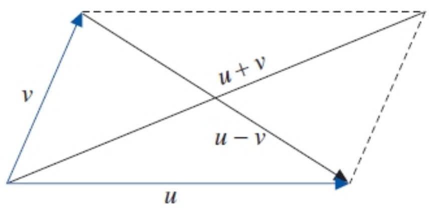
$$\langle x+y|x-y\rangle = \|x\|^2 - \|y\|^2 \quad ; \quad \langle x|y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)$$

Remarque.

1. En additionnant les deux premières formules, on obtient l'égalité suivante, appelée **égalité du parallélogramme** :

$$\forall (x,y) \in E^2 \quad \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right).$$

Cette égalité traduit le fait que, dans un parallélogramme, la somme des carrés des longueurs des deux diagonales est égale à la somme des carrés des longueurs des quatre côtés.



2. La dernière égalité, appelée **identité de polarisation**, offre l'avantage d'exprimer un produit scalaire uniquement en termes de normes. Elle est utilisée pour démontrer des propriétés concernant le produit scalaire à partir de propriétés concernant les normes.

Exercice 1.2
Soit E un espace vectoriel euclidien et f, g, deux endomorphismes de E tels que :

$$\forall x \in E, \quad \|f(x)\| = \|g(x)\|$$

Démontrer que :

$$\forall (x,y) \in E^2, \quad \langle f(x)|f(y)\rangle = \langle g(x)|g(y)\rangle.$$

2 Orthogonalité

Soit E un espace préhilbertien réel muni de sa norme euclidienne $\|.\|$ associée.

2.1 Familles orthogonales et orthonormées

Définition 2.1
On appelle vecteur **normé**, ou **unitaire**, tout vecteur de norme 1.

Définition 2.2
On dit que deux vecteurs x et y de E sont orthogonaux si $\langle x|y\rangle = 0$. On note alors $x \perp y$.

Remarques.

- Par symétrie du produit scalaire, si $\langle x|y\rangle = 0$, alors $\langle y|x\rangle = 0$. Ainsi, la relation d'orthogonalité est symétrique.
- Le vecteur nul est orthogonal à tous les autres vecteurs.
- Si un vecteur x est orthogonal à lui même, alors il est nul car :

$$\|x\|^2 = \langle x|x\rangle = 0.$$

- En particulier, le seul vecteur orthogonal à tous les autres vecteurs est le vecteur nul.

Exemple 2.1
Dans $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique, les vecteurs de la base canonique sont normés et orthogonaux deux à deux.

Exercice 2.1
Montrer que dans l'espace vectoriel des fonctions continues et 2π-périodiques sur $\mathbb{R}$, muni du produit scalaire :

$$(f,g) \longrightarrow \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)g(x)\,dx,$$

les éléments sin et cos sont unitaires et orthogonaux.

Définition 2.3
On appelle orthogonal d'une partie A de E, l'ensemble noté $A^\perp$ défini par :

$$A^\perp = \{x \in E \mid \forall a \in A \ \langle a|x\rangle = 0\}$$

Proposition 2.1
L'orthogonal d'une partie de E est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration. Soit A une partie de E. $A^\perp$ est non vide, car $0 \in A^\perp$. $A^\perp$ est stable par combinaison lineaire, en effet :

$$\forall (x,y) \in (A^\perp)^2 \ \forall (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 \ \ \forall a \in A \ \langle a|\alpha x + \beta y\rangle = \alpha\langle a|x\rangle + \beta\langle a|y\rangle = 0$$

d'où $\alpha x + \beta y \in A^\perp$. $A^\perp$ est donc un sous-espace vectoriel de E. $\square$

Exemples 2.1

1. L'orthogonal de $\{0_E\}$ est E.
2. L'orthogonal de E est $\{0_E\}$. En effet :
   - 0_E est orthogonal à tout élément de E,
   - si $x \in E^\perp$, alors en particulier x est orthogonal à lui même, ce qui prouve que x est nul.

Remarque. Soit F un sous-espace vectoriel de E. Les espaces vectoriels F et $F^\perp$ sont en somme directe car le seul vecteur orthogonal à lui-même est le vecteur nul.

Proposition 2.2
Si A et B sont deux parties de E, alors on a :

$$A \subset B \Longrightarrow B^\perp \subset A^\perp.$$

Démonstration. Supposons que $A \subset B$. Soit $x \in B^\perp$ et $a \in A$. Comme $A \subset B$, on a $a \in B$, donc $\langle a|x\rangle = 0$. Ainsi, $x \in A^\perp$. □

Proposition 2.3
Étant donné une partie A de E, alors $A^\perp = (Vect A)^\perp$.

Démonstration. On procéde par double inclusion :

- Comme $A \subset Vect A$, on a déjà l'inclusion $(Vect A)^\perp \subset A^\perp$.
- Soit $x \in A^\perp$. Pour tout $y \in (Vect A)$, il existe des éléments $a_1, \dots, a_p$ de A et des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ tels que $y = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i a_i$ donc, par bilinéarité du produit scalaire :

$$\langle x|y\rangle = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \langle x|a_i\rangle = 0,$$

ce qui prouve que $x \in (Vect A)^\perp$. Ainsi, $A^\perp \subset (Vect A)^\perp$.

□

Proposition 2.4
Soit A, B deux parties de E, F et G deux sous espaces vectoriels de E. On a :

1. $A \subset A^{\perp\perp}$
2. $A^\perp + B^\perp \subset (A \cap B)^\perp$
3. $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$

Démonstration.

1. Si $x \in A$ alors pour tout $y \in A^\perp$, $(x|y) = 0$ donc $x \in A^{\perp\perp}$, d'où l'inclusion.
2. On a : $A \cap B \subset A$ donc $A^\perp \subset (A \cap B)^\perp$, et de même $B^\perp \subset (A \cap B)^\perp$, et puisque $(A \cap B)^\perp$ est un sous espace vectoriel, $A^\perp + B^\perp \subset (A \cap B)^\perp$.

3. D'une part, $F \subset F+G$ et $G \subset F+G$ entraînent $(F+G)^{\perp} \subset F^{\perp}$ et $(F+G)^{\perp} \subset G^{\perp}$ d'où $(F+G)^{\perp} \subset F^{\perp} \cap G^{\perp}$. D'autre part, si $x \in F^{\perp} \cap G^{\perp}$ alors pour tout $z \in F+G$, il existe $(u,v) \in F \times G$ tel que $z = u+v$ et donc $(x|z) = (x|u)+(x|v) = 0$ d'où $x \in (F+G)^{\perp}$ et donc l'inclusion réciproque est établie.

$\square$

Exercice 2.2
Montrer que $(A \cup B)^{\perp} = A^{\perp} \cap B^{\perp}$.

Définition 2.4

- On appelle **famille orthogonale** de E toute famille de vecteurs de E deux à deux orthogonaux.
- On appelle **famille orthonormée** (ou **orthonormale**) de E toute famille de vecteurs de E normés et deux à deux orthogonaux.

Exemple 2.2
Dans $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique, la base canonique est une famille orthonormée.

Proposition 2.5
Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls de E est libre. En particulier, toute famille orthonormée de E est libre.

Démonstration. Soit $(e_1,\dots,e_p)$ une famille orthogonale de vecteurs non nuls de E et une famille de réels $(\lambda_1,\dots,\lambda_p)$ telle que $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i = 0$. Pour tout $k \in [\![1\,;\,p]\!]$, on a :

$$\langle \sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i | e_k \rangle = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \langle e_i | e_k \rangle = \lambda_k \|e_k\|^2 = 0$$

Le vecteur e_k étant non nul, on en déduit que $\lambda_k = 0$. Donc la famille $(e_1,\dots,e_p)$ est libre. Comme une famille orthonormée est orthogonale et composée de vecteurs non nuls, elle est libre. $\square$

Remarque. Une famille de vecteurs (orthogonaux) n'est pas libre si elle contient le vecteur nul. L'hypothèse de non nullité est donc fondamentale.

Proposition 2.6 **(Théorème de Pythagore)**
Deux vecteurs x et y de E sont orthogonaux si, et seulement si, l'on a :

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Démonstration. Conséquences de $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x|y\rangle + \|y\|^2$ et de la définition de l'orthogonalité. $\square$

Remarque. On retrouve le résultat bien connu suivant : trois points A, B et C forment un triangle rectangle en A si, et seulement si :

$$\|\overrightarrow{BC}\|^2 = \|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{AC}\|^2.$$

Proposition 2.7

Si $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est une famille orthogonale de vecteurs de E, on a :

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} x_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2.$$

Démonstration. Par bilinéarité du produit scalaire, on a :

$$\left\langle \sum_{i=1}^{n} x_i | \sum_{i=1}^{n} x_i \right\rangle = \sum_{1 \leq i,j \leq n} \langle x_i | x_j \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle x_i | x_i \rangle,$$

puisque $\langle x_i | x_j \rangle = 0$ si $i \neq j$. □

Théorème 2.1 (Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt)

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une famille libre de E. Alors il existe une famille orthonormée $(f_1, f_2, \dots, f_n)$ de E telle que :

$$\forall p \in [\![1\,;\,n]\!] \quad Vect(e_1, e_2, \dots, e_p) = Vect(f_1, f_2, \dots, f_p).$$

Démonstration. Procédons par récurrence sur p en cherchant un vecteur orthogonal aux vecteurs $f_1, f_2, \dots, f_p$ de la forme $g_{p+1} = e_{p+1} - \sum_{i=1}^{p} \lambda_i f_i$.

Construisons la famille $(f_1, f_2, \dots, f_n)$ par récurrence.

- Le vecteur f_1 doit être un vecteur normé colinéaire à e_1 . Il suffit de prendre $f_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|}$, ce qui est possible car, la famille $(e_1, \dots, e_n)$ étant libre, le vecteur e_1 est non nul.
- Supposons que pour un certain $p \in [\![1\,;\,n-1]\!]$, on ait construit une famille orthonormée $(f_1, f_2, \dots, f_p)$ telle que :

  $$\forall k \in [\![1\,;\,p]\!] \quad Vect(e_1, e_2, \dots, e_k) = Vect(f_1, f_2, \dots, f_k).$$

  Comme $Vect(e_1, e_2, \dots, e_p) = Vect(f_1, f_2, \dots, f_p)$, tout vecteur de $Vect(e_1, e_2, \dots, e_{p+1})$ peut s'écrire comme combinaison linéaire de $f_1, f_2, \dots, f_p$ et e_{p+1} . Cherchons donc g_{p+1} orthogonal aux vecteurs $f_1, f_2, \dots, f_p$ sous la forme :

  $$g_{p+1} = e_{p+1} - \sum_{i=1}^{p} \lambda_i f_i.$$

  Le vecteur g_{p+1} répond au problème si, et seulement si :

  $$\forall j \in [\![1\,;\,p]\!] \quad 0 = \langle f_j | g_{p+1} \rangle = \langle f_j | e_{p+1} \rangle - \lambda_j.$$

En posant :

$$g_{p+1} = e_{p+1} - \sum_{i=1}^{p} \langle f_i | e_{p+1} \rangle f_i.$$

on obtient donc un vecteur g_{p+1} orthogonal aux vecteurs $f_1, f_2, \ldots, f_p$ et appartenant à $Vect(e_1, e_2, \ldots, e_{p+1})$.
Le vecteur g_{p+1} est non nul puisque, la famille $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ étant libre, on a :

$$e_{p+1} \notin Vect(e_1, e_2, \ldots, e_p) = Vect(f_1, f_2, \ldots, f_p)$$

et l'on peut donc le normer en posant $f_{p+1} = \frac{g_{p+1}}{\|g_{p+1}\|}$.
La famille $(f_1, f_2, \ldots, f_{p+1})$ est alors une famille orthonormée (donc libre) de $p+1$ vecteurs de $Vect(e_1, e_2, \ldots, e_{p+1})$. Elle en est donc une base et l'on a :

$$Vect(f_1, f_2, \ldots, f_{p+1}) = Vect(e_1, e_2, \ldots, e_{p+1}).$$

□

Remarques.

- À partir d'une famille libre $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ de E, l'algorithme de Gram-Schmidt donne une famille orthonormée $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ telle que, pour tout $p \in [\![1\ ;\ n]\!]$:

  $$\langle e_p | f_p \rangle > 0 \text{ et } Vect(e_1, e_2, \ldots, e_p) = Vect(f_1, f_2, \ldots, f_p).$$

  En effet, si pour tout $p \in [\![1\ ;\ n]\!]$, on note $g_p = e_p - \sum_{k=1}^{p-1} \langle e_p | f_k \rangle f_k$, on a $f_p = \frac{g_p}{\|g_p\|}$ et donc $0 < \langle f_p | g_p \rangle = \langle f_p | e_p \rangle$ car le vecteur f_p est orthogonal aux vecteurs $f_1, \ldots, f_{p-1}$.
- Si les premiers vecteurs de la famille $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ forment une famille orthonormale, alors il est immédiat de voir que ce procédé les conserve.
- On peut généraliser le résultat au cas d'une famille infinie indexée par $\mathbb{N}$. Soit $\mathscr{F} = (e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille libre de E, c'est-à-dire telle que $(e_0, \ldots, e_n)$ soit libre pour tout $n \in \mathbb{N}$. Il existe une famille orthonormée $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E telle que :

  $$\forall p \in \mathbb{N} \quad Vect(e_0, e_1, \ldots, e_p) = Vect(f_0, f_1, \ldots, f_p).$$

2.2 Bases orthonormées

Soit E un espace euclidien de dimension n.

Définition 2.5
On appelle **base orthonormée** (ou **base orthonormale**) de E toute base de E qui est une famille orthonormée.

En particulier, si F un sous-espace vectoriel de E, on appelle base orthonormée de F toute base de F qui est aussi une famille orthonormée.

Proposition 2.8
Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Il existe alors une base orthonormée $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ de E telle que :

$$\forall p \in [\![1\ ;\ n]\!] \quad Vect(e_1, e_2, \ldots, e_p) = Vect(f_1, f_2, \ldots, f_p).$$

Démonstration. La famille obtenue par l'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt est orthonormée donc libre et possède n éléments dans un espace vectoriel E de dimension n. C'est donc une base de E. $\square$

Corollaire 2.1
Tout espace euclidien possède une base orthonormée.

Démonstration. Conséquence du fait que tout espace vectoriel de dimension finie admet une base et de la proposition précédente. $\square$

Exemple 2.3
Soient E un espace euclidien de dimension 2 et $\mathscr{B}_2 = (u_1, u_2)$ une base de E. Orthonormalisons la base $\mathscr{B}_2$:

- Posons $e_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|}$,
- $e'_2 = u_2 - \langle e_1|u_2\rangle e_1 \implies e_2 = \frac{e'_2}{\|e'_2\|}$.

Donc (e_1, e_2) est une base orthonormale de E.

Exemple 2.4
Soient E un espace euclidien de dimension 3 et $\mathscr{B}_3 = (u_1, u_2, u_3)$ une base de E. Orthonormalisons la base $\mathscr{B}_3$:

- Posons $e_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|}$,
- $e'_2 = u_2 - \langle e_1|u_2\rangle e_1 \implies e_2 = \frac{e'_2}{\|e'_2\|}$.
- $e'_3 = u_3 - \langle e_1|u_3\rangle e_1 - \langle e_2|u_3\rangle e_2 \implies e_3 = \frac{e'_3}{\|e'_3\|}$.

Donc (e_1, e_2, e_3) est une base orthonormale de E.

Exemple 2.5
$\mathbb{R}^3$ est muni de son produit scalaire canonique. Orthonormalisons la base :

$$u_1 = (1,1,0)\ ;\ u_2 = (1,0,1)\ ;\ u_3 = (0,1,1)$$

- Posons $e_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \frac{u_1}{\sqrt{2}} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$,
- $e'_2 = u_2 - \langle e_1|u_2\rangle e_1 = u_2 - \frac{1}{\sqrt{2}} e_1 = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1) \implies \|e'_2\| = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

  Posons $e_2 = \frac{e'_2}{\|e'_2\|} = (\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}})$.
- $e'_3 = u_3 - \langle e_1|u_3\rangle e_1 - \langle e_2|u_3\rangle e_2 = u_3 - \frac{1}{\sqrt{2}} e_1 - \frac{1}{\sqrt{6}} e_2 = \frac{2}{3}(-1,1,1) \implies \|e'_3\| = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

  Posons $e_3 = \frac{e'_3}{\|e'_3\|} = (-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$.

Donc (e_1, e_2, e_3) est une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$.

Proposition 2.9
Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E.

1. Si x est un vecteur de E, alors on a $x = \sum_{i=1}^{n} \langle x | e_i \rangle e_i$.
2. Si $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$ sont deux vecteurs de E, alors on a :
$$\langle x | y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = {}^t XY \quad \text{et} \quad \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = {}^t XX,$$
où X et Y sont les matrices colonnes constituées des composantes dans la base $\mathscr{B}$ des vecteurs x et y.

Démonstration.

1. Soit $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$. Comme la base $\mathscr{B}$ est orthonormée, la linéarité à gauche du produit scalaire donne :
$$\forall i \in [\![1\,;\,n]\!] \quad \langle x | e_i \rangle = \langle \sum_{k=1}^{n} x_k e_k | e_i \rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k \langle e_k | e_i \rangle = x_i.$$
Donc $x = \sum_{i=1}^{n} \langle x | e_i \rangle e_i$.
2. Soit $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$ sont deux vecteurs de E. Comme la base $\mathscr{B}$ est orthonormée, la bilinéarité du produit scalaire donne :
$$\langle x | y \rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} x_i e_i | \sum_{j=1}^{n} y_j e_j \rangle = \sum_{1 \le i,j \le n} x_i y_j \langle e_i | e_j \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = {}^t XY$$
et $\quad \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = {}^t XX.$

$\square$

Remarque. Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthogonale de E. La famille $(\frac{e_1}{\|e_1\|}, \dots, \frac{e_n}{\|e_n\|})$ étant une base orthonormée, on obtient les résultats suivants :

1. Si x est un vecteur de E, alors on a $x = \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle x | e_i \rangle}{\|e_i\|^2} e_i$.
2. Si $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$ sont deux vecteurs de E, alors on a :
$$\langle x | y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \|e_i\|^2 \quad \text{et} \quad \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \|e_i\|^2.$$

2.3 Forme linéaire sur un espace vectoriel euclidien

La structure d'espace vectoriel euclidien permet de représenter une forme linéaire par un vecteur unique.

Théorème 2.2 (Représentation de Riesz)
Soit E un espace vectoriel euclidien. Pour toute forme linéaire $f \in \mathscr{L}(E,\mathbb{R})$, il existe un vecteur $a \in E$ unique tel que :

$$\forall x \in E \quad f(x) = \langle a|x\rangle.$$

Démonstration. À tout a de E on peut associer la forme linéaire

$$\begin{array}{rccl} \theta_a : & E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \langle a|x\rangle \end{array}.$$

L'application $\begin{array}{rccl} \theta : & E & \longrightarrow & \mathscr{L}(E,\mathbb{R}) \\ & a & \longmapsto & \theta_a \end{array}$ est linéaire. Son noyau est :

$$Ker\theta = \{a \in E,\ \forall x \in E \ \ \langle a|x\rangle = 0\} = E^{\perp} = \{0\}$$

θ est donc injective et comme $dimE = dim\mathscr{L}(E,\mathbb{R})$, elle est bijective.
θ est un isomorphisme de E dans $\mathscr{L}(E,\mathbb{R})$.
Toute forme linéaire f a donc un antécédent unique par cet isomorphisme, c'est-à-dire un vecteur a tel que pour tout $x \in E \ \ f(x) = \langle a|x\rangle$.

□

Exemple 2.6
C'est ce théorème qui permet de représenter un hyperplan H, noyau d'une forme linéaire non nulle, par un vecteur normal n : pour tout $x \in E$,

$$x \in H \Longleftrightarrow \langle x|n\rangle = 0.$$

Remarque. Le résultat de ce théorème n'est plus nécessairement vrai en dimension infinie.

Exemple 2.7
Soit $E = \mathbb{R}[X]$, muni du produit scalaire défini par $(P|Q) = \int_0^1 P(x)Q(x)\,dx$.
Soit $F = \{P \in \mathbb{R}[X]/P(0) = 0\}$. F n'admet aucun vecteur orthogonal non nul car pour tout $Q \in F^{\perp}$ on a $XQ \in F$ et donc $(Q|XQ) = 0$ donc $\int_0^1 xQ(x)^2\,dx = 0$ par continuité et positivité de $xQ(x)^2$ on obtient ; pour tout $x \in]0,1]$, $Q(x) = 0$ et donc $Q = 0$.

3 Projection orthogonale sur un sous espace de dimension finie

Soit E un espace vectoriel préhilbertien muni de sa norme euclidienne $\| \ \|$.

3.1 Supplémentaire orthogonal

Proposition 3.1
Si F est un sous-espace vectoriel de dimension finie de E, alors F et $F^{\perp}$ sont supplémentaires :

$$F \oplus F^{\perp} = E$$

Le sous-espace vectoriel $F^{\perp}$ est appelé le **supplémentaire orthogonal** de F.

Démonstration. Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une base orthonormale de F . Pour tout vecteur x de E, le vecteur $x - \sum_{i=1}^{p} \langle x|e_i \rangle e_i$ est orthogonal à chaque vecteur e_i ; il appartient donc à $F^{\perp}$. On en déduit que $E = F + F^{\perp}$.
De plus, pour tout $x \in F \cap F^{\perp}$, $\langle x|x \rangle = 0$, d'où $x = 0$. on a donc $F \cap F^{\perp} = \{0\}$, et par conséquent $F \oplus F^{\perp} = E$. Les sous-espaces F et $F^{\perp}$ sont supplémentaires. □

Remarque.
- Soit E de dimension finie. Un sous-espace vectoriel F de E n'admet, en général, pas un unique supplémentaire. En revanche, il admet un unique supplémentaire orthogonal.
- Soit E de dimension infinie. Un sous-espace vectoriel F de E n'admet pas forcément de supplémentaire orthogonal.

Exemple 3.1
Dans l'exemple (2.7), $E = \mathbb{R}[X]$ est un espace vectoriel de dimension infinie, muni du produit scalaire défini par $(P|Q) = \int_0^1 P(x)Q(x)\,dx$. Pour le sous espace vectoriel $F = \{P \in E / P(0) = 0\}$, on a montré que $F^{\perp} = \{0\}$. Comme $E \neq F$, on n'a pas $F \oplus F^{\perp} = E$.

Corollaire 3.1
Si F est un sous-espace vectoriel de E et si E est de dimension finie, alors :

1. $\dim F + \dim F^{\perp} = \dim E$,
2. $(F^{\perp})^{\perp} = F$.

Démonstration.

1. Comme E est de dimension finie, F l'est également et donc F et $F^{\perp}$ sont supplémentaires, ce qui implique l'égalité souhaitée.
2. Par définition, tout élément de F est orthogonal à tout élément de $F^{\perp}$ ce qui prouve que $F \subset (F^{\perp})^{\perp}$. Comme :

$$\dim (F^{\perp})^{\perp} = \dim E - \dim F^{\perp} = \dim F,$$

on en déduit que $F = (F^{\perp})^{\perp}$.

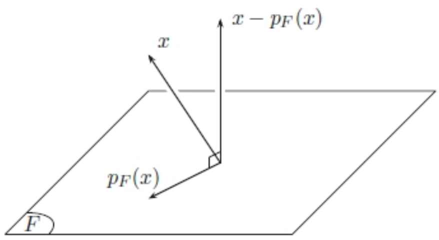
□

Exemple 3.2
En dimension finie, le supplémentaire orthogonal d'un hyperplan est donc une droite, et le supplémentaire orthogonal d'une droite, un hyperplan.

3.2 Projection orthogonale

Définition 3.1
Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E. On appelle projection orthogonale sur F, la projection sur F parallélement à son supplémentaire orthogonal $F^{\perp}$. L'image d'un vecteur x par cette projection est appelée le projeté orthogonal de x sur F.

Notation F désigne un sous espace vectoriel de dimension finie de E et p_F est la projection orthogonale sur F. À tout vecteur x de E qui se décompose en : $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in F$, $x_2 \in F^{\perp}$, on a $p_F(x) = x_1$.



Remarque. Pour tout $x \in E$, $p_F(x)$ est l'unique élément de F vérifiant $x - p_F(x) \in F^{\perp}$.

Proposition 3.2 **(Inégalité de Bessel)**
Soit F est un sous-espace vectoriel de E de dimension finie et p_F la projection orthogonale sur F. On a alors :

$$\forall x \in E,\ \|p_F(x)\| \leq \|x\|.$$

Avec égalité si et seulement si $x \in F$.

Démonstration. Soit $x \in E$. On a $x = \underbrace{p_F(x)}_{\in F} + \underbrace{x - p_F(x)}_{\in F^{\perp}}$ donc, d'après le théorème de Pythagore, on a $\|x\|^2 = \|p_F(x)\|^2 + \|x - p_F(x)\|^2 \geq \|p_F(x)\|^2$. Les quantités considérées étant positives, on en déduit l'inégalité souhaitée.

□

Exercice 3.1
Démontrer qu'une projection sur F vérifiant l'inégalité de Bessel est une projection orthogonale.

Proposition 3.3
Soit $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_p)$ une base orthonormée d'un sous-espace vectoriel F de E. Le projeté orthogonal sur F d'un vecteur x de E est :

$$p_F(x) = \sum_{i=1}^{p} \langle x | e_i \rangle e_i.$$

Démonstration. Décomposons $p_F(x)$ dans la base $\mathscr{B}$:

$$p_F(x) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i.$$

Comme $x - p_F(x) \in F^\perp$, on en déduit que pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, on a :

$$\langle e_i | x \rangle = \langle e_i | x - p_F(x) \rangle + \langle e_i | p_F(x) \rangle = \langle e_i | p_F(x) \rangle = \langle e_i | \sum_{k=1}^{p} \lambda_k e_k \rangle = \lambda_i,$$

ce qui donne le résultat. □

Exemple 3.3
Si a est un vecteur normé, la proposition précédente nous donne l'expression de la projection orthogonale $p_{\mathbb{R}a}$ sur la droite vectorielle $\mathbb{R}a$:

$$p_{\mathbb{R}a} : \begin{array}{ll} E & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \langle x | a \rangle a. \end{array}$$

Si le vecteur a n'est pas normé, on le norme pour obtenir :

$$p_{\mathbb{R}a}(x) = \frac{\langle x | a \rangle}{\|a\|^2} a.$$

Exemple 3.4
Si H est un hyperplan d'un espace vectoriel E de dimension finie, alors il existe un vecteur non nul a tel que $H = (\mathbb{R}a)^\perp$. On a donc $Id_E = p_H + p_{\mathbb{R}a}$. Pour obtenir la projection orthogonale sur H d'un vecteur, il suffit donc de lui retirer sa projection orthogonale sur $H^\perp$, c'est-à-dire :

$$\forall x \in E, \ \ p_H(x) = x - \frac{(x|a)}{\|a\|^2} a.$$

De facon général, si F et $F^\perp$ sont supplémentaires, alors $Id_E = p_F + p_{F^\perp}$. Ainsi, si on connait p_F , alors on connait $p_{F^\perp}$.

Proposition 3.4
Soit F un sous espace vectoriel de dimension finie engendrée par une famille $(e_1, e_2, \ldots, e_p)$. Étant donnés deux vecteurs x et y de E, on a :

$$y = p_F(x) \Longleftrightarrow \begin{cases} y \in F \\ \forall i \in [\![1, p]\!] \quad \langle x - y | e_i \rangle = 0. \end{cases}$$

Démonstration.

$\Longrightarrow$ Si $y = p_F(x)$, alors $y \in F$ et $x - y \in F^\perp$. Ainsi, pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, on a $\langle x - y | e_i \rangle = 0$.

$\Longleftarrow$ Réciproquement, supposons $y \in F$ et $\forall i \in [\![1, p]\!]$ $\langle x - y | e_i \rangle = 0$.
On a alors $x - y \in Vect(e_1, e_2, \ldots, e_p)^\perp = F^\perp$, d'où $x = \underbrace{y}_{\in F} + \underbrace{x - y}_{\in F^\perp}$. Comme $E = F \oplus F^\perp$, on en déduit que $y = p_F(x)$.

□

Remarque. Pour trouver le projeté orthogonal d'un vecteur x sur un sous-espace vectoriel $F = Vect(e_1, e_2, \dots, e_p)$ de dimension finie, sans avoir à déterminer une base orthonormée de F, il suffit de résoudre le système obtenu en traduisant les égalités $\langle x - y | e_i \rangle = 0$ sur les coordonnées de y.

Exemple 3.5
Déterminons la projection orthogonale du polynôme X^3 sur $\mathbb{R}_2[X]$ pour le produit scalaire :

$$\varphi : (P, Q) \mapsto \int_0^1 P(x)Q(x)\,dx.$$

Soit P le projeté orthogonal du polynôme X^3 sur $\mathbb{R}_2[X]$, on a $P(X) = aX^2 + bX + c$. Le polynôme P doit vérifier :

$$\langle X^3 - P | 1 \rangle = \langle X^3 - P | X \rangle = \langle X^3 - P | X^2 \rangle = 0,$$

ce qui se traduit par le système suivant :

$$\begin{cases} 4a + 6b + 12c = & 3 \\ 15a + 20b + 30c = & 12 \\ 12a + 15b + 20c = & 10. \end{cases}$$

L'opération élémentaire $L_2 \leftarrow L_1 + L_3 - L_2$ donne le système équivalent suivant :

$$\begin{cases} 4a + 6b + 12c = & 3 \\ a + b + 2c = & 1 \\ 12a + 15b + 20c = & 10. \end{cases}$$

ce qui conduit au système suivant :

$$\begin{cases} a + b + 2c = & 1 \\ 2b + 4c = & -1 \\ 3b - 4c = & -2. \end{cases}$$

On obtient ainsi $P(X) = \frac{30X^2 - 12X + 1}{20}$.

3.3 Distance à un sous-espace vectoriel

Définition 3.2
Soit B est une partie non vide de E et a un point de E. On appelle distance de a à B la quantité :

$$d(a, B) = \inf_{x \in B} \|a - x\|.$$

L'existence de cette quantite $d(a, B)$ vient du fait que $\{d(a, b);\ \ b \in B\}$ est une partie non vide de $\mathbb{R}$ minorée par 0.

Proposition 3.5

Soit F est un sous-espace vectoriel de dimension finie de E, p_F la projection orthogonale sur F et x un vecteur de E. La distance du vecteur x à F est atteinte en un unique point de F, à savoir $p_F(x)$. Autrement dit :

1. $d(x,F) = \|x - p_F(x)\|$;
2. $\forall y \in E \quad d(x,F) = \|x-y\| \iff y = p_F(x)$.

Démonstration.

1. Soit $x \in E$ et $y \in F$. On a :

$$x - y = x - p_F(x) + p_F(x) - y \quad \text{avec} \quad \langle x - p_F(x) | p_F(x) - y\rangle = 0,$$

   et donc, d'après le théorème de Pythagore, on a :

$$\|x-y\|^2 = \|x - p_F(x)\|^2 + \|p_F(x) - y\|^2 \geq \|x - p_F(x)\|^2$$

   Par conséquent, $d(x,F) = \inf_{y\in F} \|x-y\| \geq \|x - p_F(x)\|$ et puisque, $p_F(x)$ étant dans F, on a aussi $d(x,F) \leq \|x - p_F(x)\|$, donc $d(x,F) = \|x - p_F(x)\|$.

2. $d(x,F) = \|x-y\| \iff \|x-y\|^2 = \|x-p_F(x)\|^2 \iff \|y - p_F(x)\|^2 = 0 \iff y = p_F(x)$, donc $p_F(x)$ est l'unique élément de F où la distance est atteinte.

$\square$

Remarques. Soit F un sous espace vectoriel de dimension finie de E. Pour tout $x \in E$,

1. $\|x - p_F(x)\|^2 = \|x\|^2 - \|p_F(x)\|^2$,
2. $d(x, F^{\perp}) = \|p_F(x)\|$,
3. Si H est un hyperplan de E de vecteur normal $u \in E - \{0\}$, alors pour tout

$$x \in E, \;\; p_H(x) = x - \frac{(x|u)}{\|u\|^2}u,$$

   et donc la distance de x à H est

$$d(x,H) = \|x - p_H(x)\| = \frac{|(x|u)|}{\|u\|}.$$

Exercice 3.2

Calculer $\displaystyle \inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^{2\pi} (x - a\cos x - b\sin x)^2 \, dx.$

3.4 Familles totales

Définition 3.3
Une suite $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E est dite totale si $vect\{e_n, n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans E.

Théorème 3.1
Soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite totale orthonormée. On note $F_n = vect\{e_k / 0 \leq k \leq n\}$ et p_n la projection orthogonale sur F_n. Alors pour tout $x \in E, x = \lim_{n\to+\infty} p_n(x)$, en d'autres termes :

$$x = \sum_{k=0}^{+\infty} (e_k|x)e_k.$$

Démonstration. La densité de $vect\{e_n, n \in \mathbb{N}\}$ dans E, entraîne pour tout $\varepsilon > 0$, l'existence d'un entier $N \in \mathbb{N}$ et, $y \in F_N$ tel que $\|x - y\| \leq \varepsilon$. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $n \geq N$ alors $y \in F_n$ donc pour tout $n \geq N, \|x - p_n(x)\| = d(x, F_n) \leq \|x - y\| \leq \varepsilon$, par suite $\|x - p_n(x)\|$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini. □

Corollaire 3.2 (Identité de Parseval)
Soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite orthonormée totale de E (dite aussi base hilbertienne). Pour tout $x \in E, \|x\|^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} (x|e_n)^2$.

Démonstration. On a : $\|x-p_n(x)\|^2 = \|x\|^2 - \|p_n(x)\|^2$ car $x-p_n(x)$ et $p_n(x)$ sont orthogonaux, et on a $\|p_n(x)\|^2 = \sum_{k=0}^{n} (x|e_k)^2$ d'où

$$\|x\|^2 = \lim_n \|p_n(x)\|^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} (x|e_n)^2.$$

□