ENSA - Kenitra

Algèbre bilinéaire
Contrôle Continu

Ex1. — ① Construire une b.o.n de $F \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$.

② Déterminer la projection orthogonale de $\vec{u}(1,1,1,1)$ sur F et calculer $d(\vec{u}, F)$.

Ex2. — On cherche à calculer $\inf_{a,b \in \mathbb{R}} \int_0^1 [t \log t - at - b]^2 \, dt := m$.

① Déterminer un espace euclidien $(\vec{E}, \langle , \rangle)$, un sous espace F de $\vec{E}$ et un vecteur $f \in \vec{E}$ tel que $m = (d(f, F))^2$.

② En déduire que m existe et le calculer.

Ex3. — ① Soient $x_1 > 0, \dots, x_n > 0$ tels que $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$. Prouver que $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} \geq n^2$. Etudier le cas d'égalité.

② Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue. Prouver : $\frac{1}{3} \int_0^1 (f(t))^2 dt \geq \left[\int_0^1 t f(t) dt \right]^2$; préciser le cas d'égalité.

Ex4. — ① Prouver que si $\dim \vec{E} < +\infty$ [$\vec{E}$ euclidien] alors $\forall F$ sous esp. de $\vec{E}$ on a : $F = (F^{\perp})^{\perp}$. Cas où $\vec{E}$ préhilbertien ?

② Prouver que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \overset{\perp}{\oplus} \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

ENSA-Kenitra

U-I-T

2018-2019

Algèbre bilinéaire

EX1.- On considère la forme sur $\mathbb{R}^3$, $q(\vec{x}) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

(1) Il s'agit d'une forme quadratique. Pourquoi ?

(2) Un(e) étudiant(e) a écrit $q(\vec{x}) = (x_2 - x_3)^2 + (x_3 - x_1)^2 + (x_1 - x_2)^2$.
S'agit-il d'une décomposition de Gauss ? Justifier.

(3) Sinon, déterminer une décomposition de Gauss de q.

(4) Quelle est la signature de q ? rg q ? Cône isotrope de q ?

(5) Déterminer une base orthogonale relativement à q.

EX2.- On pose $M = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & 1 & -4 \\ -4 & 4 & -7 \\ 1 & 8 & 4 \end{pmatrix}$. (1) Prouver que $M \in O_3(\mathbb{R})$

(2) Déterminer la nature de l'endomorphisme associé à M ainsi que ses éléments caractéristiques.

EX3.- (1) Déterminer une équation réduite de la quadrique S d'équation $-2x^2 + y^2 - 2z^2 - 4xy - 4yz + 2xz - 6x - 6y - 6z = a$ $(a \in \mathbb{R})$. [Centre, axes principaux...]

(2) Préciser, selon les valeurs de a, la nature de S.

EX4.- Déterminer le polynôme minimal de la matrice M de l'ex2. Justifier.