Université Ibn Tofail
ENSA - Kenitra

Contrôle Terminal S_3
Algèbre bilinéaire et Sesquilinéaire

I - Cours. - Soit u un endomorphisme d'un espace hermitien E.

① On suppose que u est normal.

$\|u(\vec{x})\| = \|u^*(\vec{x})\| \quad \forall \vec{x} \in E.$

i) Prouver que $\|u(\vec{x})\| = \|u^*(\vec{x})\|$ ... $\|u^*(\vec{x}) - \bar{\lambda}\vec{x}\|$, $\lambda \in \mathbb{C}, \vec{x} \in E$

ii) Prouver que $\|u(\vec{x}) - \lambda\vec{x}\| = \|u^*(\vec{x}) - \bar{\lambda}\vec{x}\|$, $\lambda \in \mathbb{C}, \vec{x} \in E$

② Retrouver les faits que tte v. p d'un endomorphisme unitaire est de module 1 et que tte v. p d'un endo. hermitien est necessairement reelle.

③ Prouver que les sous espaces propres E_λ et E_μ associés à deux v. p distinctes λ et μ de u normal sont orthogonaux.

II - Nature de la quadrique $xy + xz + yz + 2y = 1$ relativement au repère o.n $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de $\mathbb{R}^3$. On precisera les axes principaux, équation réduite, ordre, signature etc...

III - Caractériser géometriquement les endomorphismes representés par les matrices % à la base Canonique que sont

$$A = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 3 & -6 & 2 \\ 6 & 2 & -3 \end{pmatrix} \text{ et } B = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & 1 & -4 \\ -4 & 4 & -7 \\ 1 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

On précisera soigneusement les éléments caracteristiques.

ENSA - Kenitra

Contrôle S3 - Algèbre bilinéaire

I.- Soit L un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et f une forme bilinéaire symétrique positive sur L i.e $f(x,x) \geq 0 \ \forall x \in L$.

① Prouver que $|f(x,y)|^2 \leq f(x,x)\, f(y,y) \ \forall x,y \in L$, et en donner une interprétation géométrique dans le cas du produit scalaire $\langle x,y \rangle$ dans l'espace usuel.

② On pose $\|x\| = \sqrt{f(x,x)}$. Prouver que $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ $\forall x,y \in L$. Donner une interprétation géométrique dans l'espace usuel.

II.- Pour $P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$ on pose $\varphi(P,Q) = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}\,dt$

① Prouver que $(\mathbb{R}_2[X], \varphi)$ est euclidien.

② Construire une base orthonormale de $(\mathbb{R}_2[X], \varphi)$ par l'algorithme G.S

III.- Dans $\mathbb{R}^4$, on considère le sous espace $F \begin{cases} x+y+z+t=0 \\ x-y-z-t=0 \end{cases}$.

① Déterminer la projection de $(1,1,1,1) = \vec{u}$ sur F, $\|$ à $F^\perp$ et en déduire $d(\vec{u}, F)$. notée $P_F(1,1,1,1)$

② Déterminer $F^\perp$, $P_{F^\perp}(\vec{u})$ et $d(\vec{u}, F^\perp)$.

.- Calculer $\underset{(a,b)\in\mathbb{R}^2}{\text{Min}} \int_0^1 [x^2 - (ax+b)]^2\,dx$.

.- ① Décomposer à l'aide de l'algorithme de Gauss la forme quadratique $q(x_1,x_2,x_3) := x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$;

en déduire la signature de q et le rang de q.

Préciser le changement de coordonnées mis en oeuvre. Préciser les matrices de q dans les nouveau et ancien syst. de coor

Université Ibn Tofail

E N S A -Kénitra-

Année Universitaire 2017-

...chimie organique S3

2017 – 2018

Univ. Ibn Tofail
ENSA – Kenitra

Algèbre Bilinéaire – Rattrapage

I – ① On Considère la forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$ s'écrivant dans la base Canonique $q(\vec{x}) = (x_2 - x_3)^2 + (x_3 - x_1)^2 + (x_1 - x_2)^2$, $\vec{x} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{matrix} \in \mathbb{R}^3$.

A-t-on une décomposition de Gauss ?

② Déterminer le rang et la signature de q.

③ Construire une base orthogonale relativement à q.

II – ① Prouver que l'application $(P, Q) \longmapsto P(0)Q(0) + P(1)Q(1)$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_1[X]$ et ② orthonormaliser la base canonique par le procédé de Gram-Schmidt.

III On note $E = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}^{C([0,\pi])}(x \mapsto e^x, x \mapsto \cos x, x \mapsto \sin x)$ muni de $\langle f, g \rangle = \int_0^\pi f(t) g(t)\,dt$.

On pose $F = \mathrm{Vect}(x \mapsto \cos x, x \mapsto \sin x)$. Justifier vos Calculs.

① Calculer $d(x \mapsto e^x, F)$;

② En déduire $\underset{a, b \in \mathbb{R}}{\mathrm{Min}} \int_0^\pi [e^x - a\cos x - b\sin x]^2 dx$.

IV ① Classifier, décrire (Centre, axes principaux éventuels, équation réduite, branches infinies, etc.) la quadrique

$$x^2 + 2yz + x + y + z = 12.$$

② Donner l'équation du plan tangent en un pt $M_0 \begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{matrix}$ de cette quadrique.