Contrôle de l'Algèbre bilinéaire

Session d'automne 2016 - 2017

DURÉE : 2H

EXERCICE 1 : *Questions de cours* (7 points)

Soit E un espace préhilbertien réel, et soit F un sous-espace de E.

1. Si $dim(E) = +\infty$, quelle est la condition sur F pour que : $F = F^{\perp\perp}$

2. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer que :

$$\forall x, y \in E \quad ||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$$

3. On suppose que $dim(F)$ est finie, soit p la projection orthogonale sur F. Soit x un vecteur de E.

a) Établir une relation entre $d(x,F)$, $d(x,F^{\perp})$ et $||x||$.

b) Soit s la symétrie orthogonale par rapport à F, donner l'expression de $s(x)$ en fonction de $p(x)$.

4. Soit g une forme linéaire définie sur E. montrer qu'il existe un vecteur w de E tel que : $\forall x \in E \quad g(x) = < x, w >$ et donner w en fonction de g.

5. Soit u un endomorphisme auto-adjoint, et soit λ une valeur propre de u et E_λ le sous espace propre de u associé à λ.

a) Soit G un sous-espace stable par u. Montrer que $G^{\perp}$ est stable par u.

b) En déduire que $(E_\lambda)^{\perp}$ est stable par u.

c) Montrer que pour tout $\lambda, \mu \in Sp(u) : \lambda \neq \mu \Rightarrow E_\lambda \perp E_\mu$.

EXERCICE 2 : (5 points)

Soit $B = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, et soit F le sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ défini par l'équation suivante : $x + y - 2z = 0$

1. Déterminer une base orthonormée de F.

2. Soit p la projection orthogonale sur F, et soit M la matrice de p dans la base

B, montrer que :

$$M = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

3. Soit s la symétrie orthogonale par rapport à F, et soit N sa matrice dans la base B, déterminer N.

4. Calculer $d(u, F)$ la distance de u à F, avec $u = 2e_1 + 2e_2 + 3e_3$.

EXERCICE 3 : (4 points)

Soit E un espace euclidien et soit f un endomorphisme de E. Soit f^* l'adjoint de f.

1. Montrer que : $(f^*)^{-1} = (f^{-1})^*$ *et* $Ker(f^*) = (Im\ f)^{\perp}$

2. On suppose que $f^* \circ f = f \circ f^*$, montrer alors que f et f^* possèdent le même noyau, les mêmes valeurs propres et les mêmes sous espaces propres.

PROBLÈME : (7 points)

Dans l'espace $\mathbb{R}_3[X]$ on définit l'application suivante :

$$< P, Q >= \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt$$

1. Prouver qu'il s'agit d'un produit scalaire.

2. Orthogonaliser $(1, X, X^2, X^3)$ par le procédé de Gram-Shmidt.

3. On pose $P_m = \frac{d^m}{dX^m}\left[(X^2-1)^m\right]$. Préciser le degré de P_m et vérifier que P_m est orthogonal à X^p pour tout $p < m$. (intégration par partie).

4. Prouver que (P_0, P_1, P_2, P_3) est une base orthogonale de $\mathbb{R}_3[X]$.

5. Soit φ une application définie de $\mathbb{R}_3[X]$ vers $\mathbb{R}_3[X]$ par : $\varphi(P)(X) = P(-X)$

Vérifier que φ est auto-adjoint, et donner une base orthonormée de $\mathbb{R}_3[X]$ formée de vecteurs propres de φ.

6. On définit ψ de $\mathbb{R}_3[X]$ vers $\mathbb{R}_3[X]$ par : $\psi(P) = \frac{d}{dX}\left[(1-X^2)\frac{d}{dX}(P)\right]$

Prouver que ψ est auto-adjoint, et donner une base orthonormée de $\mathbb{R}_3[X]$ formée de vecteurs propres de ψ.

EXAMEN DE L'ALGÈBRE BILINÉAIRE

Session d'hiver 2016 - 2017

DURÉE : 2H

EXERCICE 1 (4 points)

1. Soit f un endomorphisme de E, et M sa matrice dans la base canonique.

a) Montrer que la matrice $M = \frac{1}{\sqrt{65}}\begin{pmatrix} 1 & -7 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$ *est orthogonale et donner la nature de f et ses éléments caractéristiques.*

b) Déterminer c pour que $M = \begin{pmatrix} 1 & a \\ c & b \end{pmatrix}$ *soit orthogonale, et donner, selon b, la nature de f.*

2. Soit A une matrice antisymétrique réelle.

a) Montrer que $(I + A)$ *est inversible.*

b) Prouver que $(I - A)(I + A)^{-1}$ *est orthogonale.*

EXERCICE 2 (10 points)

Soit E un espace vectoriel réel.

A) On suppose $\dim(E) = n$. *Soit q une forme quadratique.*

1) Comparer $\ker(q)$ *et* C_q *le cône isotrope de q. (justifier)*

2) Si q est définie, que dire de $\ker(q)$ *?*

3) On considère la réduction suivante de q :

$$q(x) = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k x_k^2 + \sum_{k=r+1}^{p} \beta_k x_k^2$$

avec $\lambda_k > 0$, $\beta_k < 0$ *et* $x = (x_1, \dots, x_n)$. *Donner la signature de q, et dire quand q est positive ? négative ? définie ?*

B) On suppose que $\dim(E) = 3$, soit q l'application qui à chaque $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ associe $q(u) = -2x^2 + 2z^2 + 2\sqrt{3}yz$

1) *Justifier que q est une forme quadratique.*

2) *Soit M la matrice de q dans la base canonique, donner M.*

3) *Décomposer q sous la forme d'une somme de carrés (décomposition de Gauss).*

4) *Déterminer la signature et le rang de q.*

5) *Chercher le cône isotrope de q.*

6) *Justifier que M est diagonalisable dans une base orthonormée.*

7) *Donner le spectre et les vecteurs propres de M.*

C) On considère la quadrique :

$$S(x, y, z) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -2x^2 + 2z^2 + 2\sqrt{3}yz + 5x + \sqrt{3}y - z + 10 = 0\}$$

1) *Chercher les directions asymptotiques de S* et principal.

2) *Déterminer le centre.*

3) *Donner l'équation réduite.*

4) *Préciser la nature de S et la tracer.*

EXERCICE 3 (9 points)

Soit E l'espace vectoriel complexe des fonctions continues 2π-périodiques.

$B_m = (e^{int})_{-m \leq n \leq m}$ est une famille de E, on définit l'application ψ par :

$$\forall f, g \in E \qquad \psi(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g(t)}dt$$

1. *Prouver que ψ est un produit scalaire hermitien.*

2. *Montrer que B_m est une famille orthogonale. Normaliser B_m.*

3. *Soit f le vecteur de E défini par :*

$$f(t) = \begin{cases} -t & si \quad t \in]-\pi, 0] \\ t & si \quad t \in]0, \pi] \end{cases}$$

   a) *Déterminer $\tilde{f}$ la projection de f sur $vect(B_m)$.*

b) Montrer que $\|\hat{f}\|^2 \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt$.

c) Quand a-t-on l'égalité ?

4. *Soit* $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *une suite à valeurs complexes telle que la suite de terme général* $A_N = \sum_{n=-N}^{N} |a_n|^2$ *converge. On définit l'application* φ_A *de* E *vers* $\mathbb{C}$ *par :*

$$\forall s \in E \quad \varphi_A(s) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n C_n(s)$$

avec $C_n(s)$ *la n-ème coordonnée de la projection de* s *sur* B_{∞}.

a) Justifier que φ_A *est bien définie.*

b) Prouver que φ_A *est linéaire continue.*

c) Réciproquement : montrer que pour toute forme τ *de* E *vers* $\mathbb{C}$ *linéaire continue, il existe une unique suite* $(a_n)_n$ *telle que :*

$$\forall s \in E \quad \tau(s) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n C_n(s) \quad \text{avec} \quad \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=-N}^{N} |a_n|^2 < +\infty$$

(Dans cette partie, on établit que l'espace $l_2(\mathbb{Z})$ *- l'espace des suites définies de* $\mathbb{Z}$ *vers* $\mathbb{C}$ *de carré sommable - est isomorphe à* E^* *le dual de* E*, et de plus on donne une caractérisation des vecteurs de* E^**).*

N.B : La continuité dans les questions (b) et (c) est au sens de la norme 2, c'est à dire la norme induite par le produit scalaire hermitien qu'on a défini au début de l'exercice.

BONNE CHANCE