UNIVERSITE IBN TOFAIL
ENSAK, S3

Contrôle d'algèbre bilinéaire; novembre 2015

EXERCICE 1 *L'espace vectoriel $\mathbb{R}_3[X]$ des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 3 est muni de:*

$$(P \mid Q) = \int_{t=-1}^{1} P(t)Q(t)\,dt.$$

1. *Vérifier qu'il s'agit bien d'un produit scalaire sur $\mathbb{R}_3[X]$*
2. *Soit $F = vect(1+X, X^2+2X^3)$. Donner une base orthonormée de F*
3. *Donner une base orthonormée de $F^\perp$*
4. *Soit p la projection orthogonale sur F. Calculer $p(X^3)$*
5. *Calculer $d(X^3, F)$*
6. *Soit q la projection orthogonale sue $F^\perp$. Trouver une relation entre p et q*

Contrôle

EXERCICE 2 *Soit E un espace euclidien de dimension 3, $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ une base orthonormée de E, et F le sev d'équations dans $\mathcal{B}$:* $\begin{cases} x+y+2z=0 \\ x-2y+z=0 \end{cases}$

1. *Trouver une base orthonormée de F.*
2. *Trouver une base orthonormée de $F^\perp$.*
3. *Calculer la distance $d(e_1, F)$*

EXERCICE 3 *On considère l'espace euclidien $\mathbb{R}^4$, muni du produit scalaire noté $(./.)$ défini par:*

$$\forall u = (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4, \forall u' = (x',y',z',t') \in \mathbb{R}^4, \qquad (u/u') = xx' + yy' + zz' + tt' + \frac{xz' + x'z}{2}.$$

La norme du vecteur u est alors définie par $\|u\| = \sqrt{(u/u)}$.
On note $B = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$.
On note $F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \quad / x+y-z-t = 0\}$.

1. *Montrer que F est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.*

2. *Donner une base de F.*

3. *Construire une base orthonormée de F. On notera $U = (v_1, v_2, v_3)$ une telle base.*

4. *La base B est-elle orthonormée?*

5. *Compléter U en une base orthonormée B' de $\mathbb{R}^4$*

6. *Soit p la projection orthogonale sur F. Donner l'image de $w = (1, 0, 0, 1)$ par p*

7. *Donner la distance $d(w, F)$.*

8. *Donner la matrice M de p dans la base B'.*

9. *Donner la matrice A de p dans la base B.*

10. *Vérifier que ${}^tM = M$ et que $M^2 = M$.*

11. *A-t-on les égalités $A^2 = A$, ${}^tA = A$?*

Problème

Soient n un entier $\geqslant 2$ et E l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels.

I est la matrice identité de E. On note ${}^tA$ la transposée d'un élément A de E. Si $A = (a_{i,j})$ appartient à E, on appelle trace de A et on note $tr(A)$, la somme $a_{1,1} + a_{2,2} + \cdots + a_{n,n}$ des éléments diagonaux de A.

On considère l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$, muni du produit scalaire noté $(./.)$ défini par:

$$\forall u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \forall u' = (x', y', z') \in \mathbb{R}^3, \qquad (u/u') = xx' + yy' + zz'.$$

La norme du vecteur u est alors définie par $\|u\| = \sqrt{(u/u)}$.

On note $\mathbb{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on rappelle que $\mathbb{B}$ est orthonormale pour le produit scalaire défini ci-dessus.

On désigne par a, b et c trois réels, on pose $\omega = (a, b, c)$ et on suppose que c est non nul.

On note φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ qui à tout vecteur $u = (x, y, z)$ de $\mathbb{R}^3$ associe le vecteur

$$\varphi(u) = (yc - zb, za - xc, xb - ya).$$

1. Écrire la matrice M de φ dans la base $\mathbb{B}$.

2. Vérifier que $\omega \in ker\varphi$.

3. Montrer que $(\varphi(e_1), \varphi(e_2))$ est une famille libre.

4. Déduire des questions précédentes que $\ker\varphi = vect(\omega)$.

5. Montrer que pour tout vecteur u de $\mathbb{R}^3$, $\quad (\varphi(u)/\omega) = 0$.

6. En déduire que:
$$Im\varphi = (ker\varphi)^{\perp}$$

7. Justifier que pour tout vecteur u de $\mathbb{R}^3$, il existe un unique couple (u_1, u_2) élément de $ker\varphi \times Im\varphi$ tel que $u = u_1 + u_2$.

8. Montrer que $(u/\omega) = (u_1/\omega)$.

9. En déduire que $u_1 = \frac{(u/\omega)}{\|\omega\|^2}\omega$, puis déterminer u_2 en fonction de u et ω.

10. Montrer que $M^3 = -\|\omega\|^2 M$.

11. En déduire que:
$$\forall v \in Im\varphi, \qquad \varphi \circ \varphi(v) = -\|\omega\|^2 v.$$

12. Montrer finalement que:
$$\forall u \in \mathbb{R}^3, \qquad \varphi \circ \varphi(u) = -\|\omega\|^2 u + (u/\omega)\omega.$$

On considère l'application g de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$, qui à deux matrices A et B de E fait correspondre le réel $g(A, B) = tr({}^tAB)$.

13. Montrer que l'application tr qui à tout élément de E associe sa trace, est une forme linéaire sur E.

14. Soit M une matrice de E. Montrer que $tr(M) = tr({}^tM)$.

15. En déduire que, pour tout couple (A, B) de matrices de E, on a $g(A, B) = g(B, A)$.

16. Soit A un élément de E. Montrer que $g(A, A)$ est la somme des carrés des coefficients de A.

17. Montrer, à (aide des questions précédentes, que g est un produit scalaire sur E.
Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ défini par:
$f(e_1) = e_n$ et, pour tout entier k tel que $2 \leqslant k \leqslant n$, $f(e_k) = e_{k-1}$

18.

19. Montrer que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^n$.

20. Soit U la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$. Montrer que $U^n = I$ et que $U^{-1} = {}^tU$.

On suppose, pour les deux questions suivantes, que $n = 4$.

UNIVERSITE IBN TOFAIL
ENSAK

Algèbre multilinéaire

Examen S3, janvier 2016

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ étant muni de son produit scalaire canonique, on note $B = (e_1, e_2, e_3)$ sa base canonique. On considère la matrice

$$A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 7 & 4 & -4 \\ -4 & 8 & 1 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que $A = mat_B(f)$.

1. Montrer que f est un automorphisme orthogonal de $\mathbb{R}^3$.
2. Donner la nature de f et ses éléments caractéristiques.
3. Soit $M = {}^t AA$. Montrer que M est symétrique.
4. Justifier sans calcul que M est diagonalisable.
5. Donner la matrice dans B de l'endomophisme f^* adjoint de f.
6. Déterminer une matrice diagonale D et une matrice orthogonale P telles que $D = P^{-1}MP$.
7. Décomposer f en produit de reflexions.
8. L'endomorphisme $h = f - id_{\mathbb{R}^3}$ est-il un automorphisme orthogonal?
9. Soit $u = h^* o h$. Montrer que u et h ont le même noyau.
10. Soit a la plus petite valeur propre de u et b sa plus grande valeur propre. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^3; a\|x\|^2 \leq (u(x)|x) \leq b\|x\|^2$

RAT

UNIVERSITE IBN TOFAIL
ENSAK

Algèbre multilinéaire

Devoir surveillé S3, janvier 2016

Dans tout le sujet E désigne un espace vectoriel euclidien, $B = (e_1, e_2, e_3)$ une base orthonormée de E.

On considère la matrice

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

Soit f l'endomorphisme de E tel que $A = mat_B(f)$.

1. Montrer que f est un automorphisme orthogonal de E.
2. Donner la nature de f et ses éléments caractéristiques.
3. Soit $C = A - I_3$ et $M = {}^tCC$. Montrer que M est symétrique.
4. Justifier sans calcul que M est diagonalisable.
5. Donner la matrice dans B de l'endomophisme f^* adjoint de f.
6. Déterminer une matrice diagonale D et une matrice orthogonale P telles que $D = P^{-1}MP$.
7. Décomposer f en produit de reflexions.
8. L'endomorphisme $h = f - id_E$ est-il un automorphisme orthogonal?
9. Montrer qu'il existe un endomorphisme symétrique positif s tel que $s^2 = h^*oh$.
10. Déduire l'existence d'un automorphisme orthogonal r de E tel que $h = sor$.