UNIVERSITE IBN TOFAIL
ENSAK

Algèbre multilinéaire

Devoir surveillé S3, novembre 2014

Dans tout le sujet E désigne un espace vectoriel euclidien, $B = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ une base orthonormée de E. Soit F le sous espace vectoriel de E engendré par

$$L = (e_1 - e_2, e_2 + e_4, e_1 + e_3)$$

1. Montrer que L est une de F.
2. Donner une base orthonormée de F.
3. Soit p la projection orthogonale sur F. Déterminer le noyau de p
4. Donner une base orthonormée de $F^\perp$
5. Calculer $p(e_i)$ pour $i \in \{1, .., 4\}$
6. Dans toute la suite du sujet, on pose $x = e_1 + 2e_2 - e_4$. Calculer $d(x, F)$
7. Calculer $d(x, F^\perp)$
8. Pour un vecteur y de E, donner une relation simple entrer $d(y, F) + d(y, F^\perp)$ et $\|y\|$.
9. Soit s la symétrie orthogonale par rapport à F. Calculer $s(x)$.
10. Donner la matrice de s dans la base B.

UNIVERSITE IBN TOFAIL
S3, ENSAK

Algèbre bilinéaire **Examen janvier 2015**

EXERCICE 1 *Soit* $E = \mathbb{R}^3$ *muni de sa structure euclidienne canonique et*

$$F = \{u = (x, y, z)/x + y + z = x - y - z = 0\}.$$

1. *Déterminer une base orthonormée de* $F^\perp$
2. *Ecrire dans la base canonique de* $E = \mathbb{R}^3$, *la matrice de la projection orthogonale* p *sur* F.
3. *Ecrire dans la base canonique de* $E = \mathbb{R}^3$, *la matrice de la symétrie orthogonale par rapport à* F
4. *Calculer* $d(u, F)$, *où* $u = (1, 0, -1, 1)$.

EXERCICE 2 *Soit* E *un espace vectoriel euclidien et* p, q *deux projections orthogonales tels que* $poq = qop = 0$. *Montrer que* $p + q$ *est une projection orthogonale.*

EXERCICE 3 *On considère le système* S: $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x + 2y + z = 1 \\ z + 2y = 0 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$

1. *Le système admet-il des solutions?*
2. *Donner la meilleur solution au sens des moindres carrés*

EXERCICE 4 *Soit* E *un eve de dimension* 3 *et* B *une base orthonormée de* E. *Soit* f *de* E *dont la matrice dans* B *est* $A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & 1 & 4 \\ -4 & 4 & 7 \\ 1 & 8 & -4 \end{pmatrix}$

1. *Montrer que* f *est un automorphisme orthogonal*
2. *Dnner la nature de* f
3. *Donner les éléments caractéristiques de* f